Chapitre 5 : Suites-raisonnement par récurrence

Tables des matières

I Notion de suite **2**
1 Introduction . . . 2
2 Généralités . . . 2
3 Représentation graphiques des suites . . . 2
4 Opérations sur les suites . . . 3

II Propriétés globales des suites **3**
1 Suites majorées, minorées, bornées . . . 3
2 Suites monotones . . . 3

III Suites remarquables **4**
1 Suites arithmétiques et géométriques . . . 4
a Définitions et propriétés de base ♡ . . . 4
b Sommes de termes consécutifs . . . 5
2 Suites arithmético-géométriques : . . . 5
3 Suites récurrentes linéaires doubles . . . 6

IV Limites de suites **7**
1 Suites convergentes et divergentes . . . 7
2 Limites des suites de références . . . 8
3 Opérations sur les limites . . . 8
4 Croissances comparées. Techniques sur les formes indéterminées . . . 10

V Propriétés des limites et théorèmes de convergence pour les suites **10**
1 Passage à la limite dans les égalités et les inégalités . . . 10
2 Théorèmes de comparaison . . . 11
3 Critère de convergence monotone . . . 11
4 Suites adjacentes . . . 12

VI Raisonnement par récurrence **12**
a Récurrence simple . . . 12
b Récurrence double . . . 13
c Récurrence forte . . . 13

I Notion de suite

1 Introduction

Les suites numériques sont des objets très utiles en analyse. Elles permettent par exemple d'obtenir des valeurs approchées de divers objets, que ce soit les solutions d'une équation, des nombres irrationnels particuliers ou des intégrales. Dans ce chapitre, nous commençons par introduire les notions de suites monotones et de suites bornées. On décrit ensuite les différentes suites usuelles à connaitre (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2). On donne la définition d'une suite convergente et on décrit les différentes opérations possibles sur les limites. Enfin, nous terminons le chapitre avec le théorème des suites monotones et le théorème des suites adjacentes qui permettent de prouver la convergence de certaines suites.

2 Généralités

Définition. Une *suite réelle* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'image de n par la suite u se note u_n (plutôt que $u(n)$), appelé le *terme* de *rang* n (ou d'*indice* n) de la suite.

L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Remarque . La suite (l'ensemble de tous les termes) est notée entre parenthèses $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voire (u_n)) et un terme de la suite, sans parenthèse : u_n (même distinction qu'entre les notations f et $f(x)$).

Une suite peut être définie à partir d'un certain entier n_0 plutôt que sur $\mathbb{N}$. De la même manière, certaines propriétés des suites peuvent n'être valables qu'à partir d'un certains rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Par conséquent, tous les énoncés du cours peuvent (et doivent parfois) être adaptés pour de telles suites (remplacer $n \in \mathbb{N}$ par $n \geqslant n_0$).

Définition (Génération). Il y a plusieurs façons de définir une suite :

- *Explicitement* : c'est à dire en fonction de n.
- *Implicitement* : dans le cas contraire. En particulier :
    1. par récurrence : on donne un ou plusieurs termes initiaux et une relation de récurrence, c'est à dire un terme de la suite en fonction du (ou des) termes précédent(s).
    2. à l'aide d'un symbole somme ou d'un produit (c'est un cas particulier du précédent).
    3. totalement implicitement (voir le dernier point de l'exemple ci-dessous).

Exemple 1. ✎

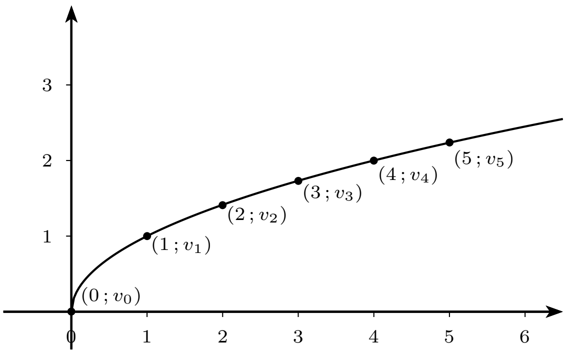
1. On note $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = 1$.
    (a) Comment sont définies les deux suites ? Donner u_{99}.
    (b) Calculer v_1, v_2, v_3. Que peut-on conjecturer sur v_{99} ? v_n ? Démontrer votre conjecture.
2. Soit (w_n) défine par $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Calculer w_{98}.
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des solutions positives de l'équation $x^3 + 2x^2 + x = n$. Comment obtenir x_1 ?

3 Représentation graphiques des suites

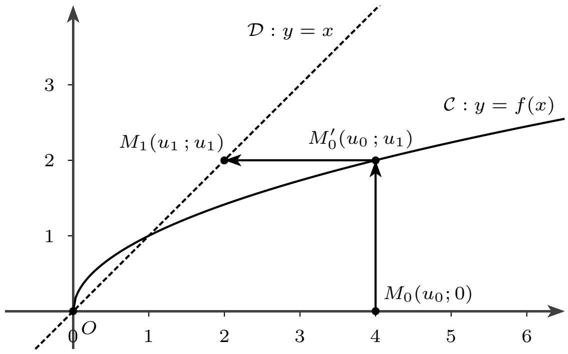
Méthode. Représenter graphiquement des suites

1. suite explicite : l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;f(n))$ représentent les termes d'une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie explicitement par $v_n = f(n)$.
2. suite récurrente (d'ordre 1) : pour représenter une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, on trace la courbe $\mathcal{C}$ de f et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$. On place le point M_0 de coordonnées $(u_0\,;0)$. On représente la suite en appliquant le procédé initié sur le graphique ci-dessous qui conduit à des « escaliers »ou des « spirales ».

⚠ Ces deux façons de générer des suites produisent des suites différentes pour une même fonction f.



Suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sqrt{n}$



Suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

4 Opérations sur les suites

Définition. On définit trois opérations sur les suites, qui sont des opérations terme à terme :

1. une addition : pour toutes suites u et v, $u+v = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. une multiplication (externe) : pour tout réel λ et toute suite u, $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. une multiplication (interne) : pour toutes suites u et v, $u\,v = (u_n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

II Propriétés globales des suites

1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition. une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- ⋆ *minorée* si $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$. ($m$ est alors un minorant de la suite)
- ⋆ *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$. ($M$ est alors un majorant de la suite)
- ⋆ *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée
- ⋆ *bornée* s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ |u_n| < M$.

Méthode. Montrer qu'une suite est majorée (ou minorée)

Il y a plusieurs méthodes classiques, le choix de la bonne méthode dépendant essentiellement de la suite considérée.

1. étude de la fonction sous-jacente f : valable seulement pour des suites explicites : (u_n) définie par $u_n = f(n)$. Il suffit alors d'étudier f sur $[0;+\infty[$.
2. à l'aide inégalités, obtenues de manière algébrique ou découlant de questions précédentes.
3. par récurrence : si la suite est définie par récurrence, c'est souvent (pas toujours) la bonne méthode.

Exemple 2. ✎

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n + 4(-1)^n$. Montrer que cette suite est bornée.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{n^2+n+1}$ est bornée par -1 et $\dfrac{1}{3}$.
3. $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$ avec $u_0 = 0$. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;3]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite est majoréé par 2 et minorée par 1 (on montrera tout d'abord que pour $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$).
5. La suite $(n-n^2)$ est-elle majorée ? minorée ? bornée ?
6. Définir avec des quantificateurs ce qu'est une suite non bornée.

2 Suites monotones

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- $\star$ *strictement croissante* si et seulement si pour tout entier n, on a $u_{n+1} > u_n$.
- $\star$ *strictement décroissante* si et seulement si pour tout entier n, on a $u_{n+1} < u_n$.
- $\star$ *strictement monotone* si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- $\star$ *constante* si et seulement si pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$.

On définit une suite *croissante*, *décroissante* ou *monotone* de même, avec des inégalités larges.

Remarque . Dans la pratique, seule les variations à partir d'un certain rang nous intéresse. Par exemple, si on trouve qu'une suite (u_n) commence par décroître jusqu'au rang 3 puis est croissante à partir du rang 3, on dira simplement que « (u_n) est croissante à partir du rang 3 ». La rédaction diffère donc de celle des études de fonctions.

⚠Il existe des suites qui ne sont ni croissantes , ni décroissantes, même à partir d'un certain rang. Par exemple : $(-1)^n$.

Méthode. Etudier les variations d'une suite ♡

1. étude de la fonction sous-jacente f : valable seulement pour des suites explicites : (u_n) définie par $u_n = f(n)$. Il suffit alors d'étudier f sur $[0;+\infty[$.
2. étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est la méthode la plus classique. Si cette quantité est toujours positive, la suite est croissante, si elle est toujours négative, la suite est décroissante.
3. comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. A appliquer **uniquement** lorsque $u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette méthode est surtout utilisé pour des suites qui sont définies par des produits, des puissances, quantités qui se simplifient mieux par quotient que par différence. Si cette quantité est toujours plus grande que 1, la suite est croissante, si elle est toujours comprise entre 0 et 1, la suite est décroissante.
4. par récurrence. Cette méthode est souvent (pas toujours) la bonne pour les suites récurrentes. Pour montrer qu'une suite est croissante, $\mathcal{P}_n$: « $u_n < u_{n+1}$ » et pour montrer qu'une suite est décroissante $\mathcal{P}_n$: « $u_n > u_{n+1}$ »

Exemple 3. ✎ Etudier les variations :

1. de la suite étudiée à la deuxième question de l'exemple précédent.
2. des suites définies par $u_n = \frac{2^n}{n^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
3. des suites arithmétiques, puis des suites géométriques de 1^er^ terme et de raison strictement positifs.
4. de la suite étudiée à la troisième question de l'exemple précédent. Même question si $u_0 = 5$.

III Suites remarquables

Ce chapitre présente quatre types de suites remarquables : les suites arithmétiques, les suites géométriques, les suites arithmético-géométriques et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Dans chaque cas, l'idée est la même : la suite est d'abord définie par une formule de récurrence et l'objectif est de trouver une formule explicite. Les trois premiers cas ont été vus au lycée, même si on systématise ici davantage la méthode pour les suites arithmético-géométriques.

Enfin, des résultats sur les sommes de termes consécutifs sont également donnés.

1 Suites arithmétiques et géométriques

a Définitions et propriétés de base ♡

	Suite arithmétique de raison r de premier terme u_0	Suite géométrique de raison q de premier terme u_0
Définition par récurrence		
Formule explicite		
Relation entre deux termes		

b Sommes de termes consécutifs

Proposition 1.Sommes de références ♡

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, on a $\sum u_k = \dfrac{(\text{nb de termes}) \times (1^{\text{er}}\text{terme} + \text{dernier terme})}{2}$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \neq 1$, on a $\sum u_k = (1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$.

Méthode. Montrer qu'une suite est arithmétique (*resp.* géométrique)

1. Soit la suite est définie de manière explicite et on reconnaît une des expressions du tableau.
2. Sinon, on cherche à établir que **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ (*resp.* $u_{n+1} = qu_n$) , où r (*resp.* q) est un nombre réel. Pour cela, on utilise les méthodes habituelles pour montrer une égalité : partir de la gauche vers la droite, simplifier séparement les deux quantités pour arriver au même résultat ou encore démontrer que $u_{n+1} - u_n$ (*resp.* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$) est égal à un réel r (*resp.* q) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4. ✎

1. Montrer que la somme des n premiers nombres entiers impairs est un carré.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 6u_n + 2\times 7^n \end{cases}$ On pose $v_n = u_n - 2\times 7^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 6.
   (b) Calculer v_n en fonction de n. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\times 7^n \left(1 - \left(\dfrac{6}{7}\right)^n\right)$
3. Soit (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 &= -\dfrac{1}{2} \\ w_{n+1} &= \dfrac{5w_n - 1}{w_n + 3} \end{cases}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n = \dfrac{w_n + 1}{1 - w_n}$ et on admettra que cette suite est bien définie (le démontrer pour les sceptiques).
   (a) Exprimer w_n en fonction de h_n.
   (b) Démontrer que la suite (h_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$.
   (c) Calculer h_n en fonction de n, puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{3n+4}{3n-8}$.

2 Suites arithmético-géométriques :

Définition. Une suite est dite **arithmético-géométrique** si il existe un réel a et un réel b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque . Si $a = 0$ ou 1 ou encore $b = 0$ la suite est constante, arithmétique ou géométrique. Inutile d'appliquer les résultats de cette partie ! Sinon, ⚠**une suite arithmétique n'est ni arithmétique ni géométrique**.

La méthode suivante permet de déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

Cette méthode, décrite quand le premier rang est 0, s'adapte aisément à une suite définie à partir d'un autre rang.

Méthode. Déterminer le général d'une suite arithmético-géométrique ♡

1. **Reconnaître une suite arithmético-géométrique** et le préciser sur la copie.
2. **Résoudre l'équation** $x = ax + b$ d'inconnue x. Ici on note α l'unique solution.
3. **Définir une suite auxiliaire** v par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \alpha$
4. **Montrer que** v **est géométrique**
   Préciser la raison trouvée et calculer sont premier terme $v_0 = u_0 - \alpha$
5. **Déduire le terme général de** v à l'aide du cours.
6. **Déduire le terme général de** u à l'aide de la définition de v : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \alpha$

Méthode. Calcul de la somme des termes d'une suite arithmético-géométrique

Le terme général d'une telle suite est de la forme $u_n = v_n + \alpha$, où α est une constante et v une suite géométrique. Par linéarité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} \alpha$.

Exemple 5. ✎

1. Déterminer le terme général des suites suivantes et calculer la somme des n premiers termes :
   (a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} v_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 3v_n - 1 \end{cases}$
2. Une personne effectue un prêt de 100000 euros au mois 0, avec un taux d'intérêt mensuel de $0,2\%$, intérêts calculés à la fin de chaque mois sur la base de ce qu'il reste à rembourser. Il rembourse chaque premier jour du mois la somme fixe de 1000 euros (sauf le mois 0).
   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la somme que la personne doit encore payer après son versement du mois n (tant qu'il reste quelque chose à payer).
   (b) (avec la calculatrice, le tableur, ou Scilab). Dire au bout de combien de temps la personne aura remboursée son prêt.
   (c) Adapter le raisonnement pour calculer le versement mensuel nécessaire à un remboursement du prêt sur 10 ans (le taux d'intérêt reste le même).

3 Suites récurrentes linéaires doubles

Définition. Une suite (u_n) est dite **récurrente linéaire double** si il existe un réel a non nul et deux réels b et c tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

La méthode suivante permet de déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire double.

Cette méthode, décrite quand le premier rang est 0, s'adapte aisément à une suite définie à partir d'un autre rang.

Méthode. Déterminer le terme général d'une suite récurrente double ♡

1. **Reconnaitre une suite récurrente linéaire double** et le préciser sur la copie.
2. **Écrire l'équation caractéristique** $ax^2 + bx + c = 0$ et **calculer son discriminant**.
3. (a) Si $\Delta > 0$, il y a deux solution x_1 et x_2. Alors **appliquer le théorème** suivant :

   Théorème 2.
   Il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$

   (b) Si $\Delta = 0$, il y a une unique solution x. Alors **appliquer le théorème** suivant :

   Théorème 3.
   Il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)x^n$

   (c) Le cas $\Delta < 0$ n'est pas au programme et vous ne le rencontrerez jamais !
4. **Déterminer λ et μ en résolvant le système** obtenu à l'aide des deux conditions initiales.

   (a) : $\begin{cases} u_0 = \lambda x_1^0 + \mu x_2^0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda x_1^1 + \mu x_2^1 = \lambda x_1 + \mu x_2 \end{cases}$ (b) : $\begin{cases} u_0 = (\lambda + \mu \times 0)x^0 = \lambda \\ u_1 = (\lambda + \mu \times 1)x^1 = \lambda x + \mu x \end{cases}$

5. **Conclure** en remplaçant λ et μ par leurs valeurs dans l'énoncé du théorème (utilisé au point 3.)

Exemple 6. ✎ Déterminer le terme général des suites suivantes.

1. La suite de premiers termes $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$ vérifiant : $\forall n \geqslant 1, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$
2. La suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Remarque . Pour calculer la somme des termes d'une suite récurrente linéaire double :

1. dans le cas (a), la suite est une somme de deux suites géométriques.
2. dans le cas (b), il n'y a pas de méthode simple pour la seconde somme (de terme général nx^n).

IV Limites de suites

Ce chapitre donne tout d'abord les définitions rigoureuses de ce que sont des suites convergente, divergente vers $\pm\infty$ et divergente sans limite. L'intérêt de cette première partie, en dehors de fixer un cadre précis, est qu'elle permet de démontrer tous les résultats qui suivent dans les deux parties suivantes (nous n'en démontreront qu'un ou deux), ainsi que de nombreux théorèmes de la suite du cours.

Dans une seconde partie sont données les limites des suites dites de références, que vous pouvez voir comme le parallèle des formules de dérivation des fonctions usuelles. Il est donc primordial de savoir restituer tous ces résultats.

Sont abordées ensuite les principales opérations sur les limites (somme, différence, produit, inverse, quotient et composition). Certains cas donnent lieu à ce qu'on appelle des **formes indéterminées**, ce qui veut dire que le résultat de cette opération n'est pas connu *a priori* et dépend de l'exemple traité.

Enfin, nous verrons des résultats de **croissances comparées**, qui sont des cas particuliers de formes indéterminées qui reviennent souvent dans les exercices et sont à connaître.

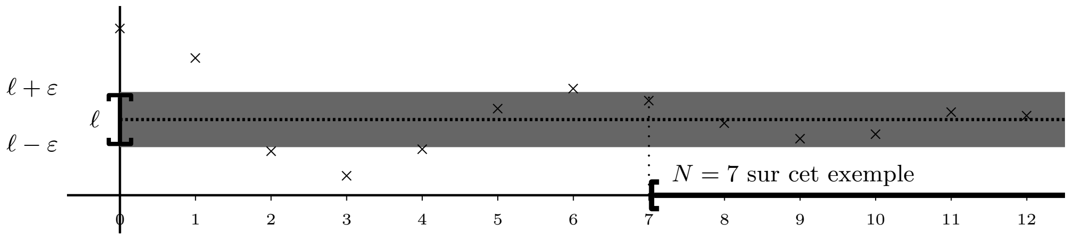
Donner la **nature** d'une suite, c'est dire si elle est convergente ou divergente.

1 Suites convergentes et divergentes

Suite convergente

Définition. On dit qu'une suite converge (ou admet une limite finie) lorsqu'il existe un réel l tel que tout intervalle ouvert I contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Ceci revient à dire que, **pour tout réel** $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et l est appelée la limite de la suite.

Remarque . La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique



Il y a deux cas pour qu'une suite soit divergente : soit elle n'a pas de limite (par exemple $(-1)^n$), soit sa limite est infinie.

Suite divergente vers $+\infty$

> **Définition.** On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ lorsque : tout intervalle ouvert du type $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
>
> Cela revient à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N tel que : $n \geqslant N \Rightarrow u_n > A$

Exemple 7. ✎ Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et donner la limite d'une suite constante.

2 Limites des suites de références

Proposition 4. LIMITE DES SUITES PUISSANCES ♡

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$. Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

Proposition 5. LIMITES DES SUITES GÉOMÉTRIQUES ♡

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$. Alors :

1. si $q \leqslant -1$ la suite n'a pas de limite.
2. si $-1 < q < 1$ la suite converge vers 0.
3. si $q = 1$ la suite converge vers 1 et est constante.
4. si $q > 1$ la suite diverge et tend vers $+\infty$.

Proposition 6. LIMITES DU LOGARITHME ♡

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty.$$

Exemple 8. ✎ A partir de ces propriétés, donner les limites éventuelles des suites suivantes :

1. $n^3, \sqrt{n}, \quad n^{-0.0001}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{1}{n^{-0.0001}}, \quad \frac{n^3}{n^4}, \quad n^{-0.4}\sqrt{n}.$
2. $u_n = -3\left(\frac{\pi}{3}\right)^n, \quad v_n = -3\left(\frac{3}{\pi}\right)^n, \quad w_n = 3\left(-\frac{3}{\pi}\right)^n, \quad x_n = 3\left(-\frac{\pi}{3}\right)^n$

3 Opérations sur les limites

Voici une série de tableaux qui donnent les résultats des opérations sur les limites. On notera FI pour forme indéterminée.

Multiplication par un réel Soit u une suite ayant une limite et λ un réel non nul.

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de λu selon la limites de u.

$\lim u$ \ λ	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
$l \in \mathbb{R}$	λl	λl
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Somme Soient u et v deux suites ayant des limites (finies ou infinies).

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de $u+v$ selon les limites de u et v.
En combinant la multiplication par -1 et la somme on peut aisément déduire les limites obtenues par soustraction.

$\lim u$ \ $\lim v$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	FI
$-\infty$			$-\infty$

Produit Soient u et v deux suites ayant des limites (finies ou infinies).

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de uv selon les limites de u et v.

<table>
<tr><th>$\lim u$ \ $\lim v$</th><th>$l' > 0$</th><th>$l' < 0$</th><th>$l' = 0$</th><th>$+\infty$</th><th>$-\infty$</th></tr>
<tr><td>$l > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">ll'</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$l < 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$l = 0$</td><td colspan="2">FI</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td colspan="3"></td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td colspan="4"></td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

Inverse Soit u une suite ayant une limite.

$\lim u$	$l \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{1}{u}$	$\dfrac{1}{l}$	0

⚠Si $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$, il faut étudier **le signe de u**

Si $u_n > 0$: $\lim \frac{1}{u} = +\infty$

Si $u_n < 0$: $\lim \frac{1}{u} = -\infty$

Sinon : $\frac{1}{u}$ n'a pas de limite

Quotient

Pour étudier la limite d'un quotient $\frac{u}{v}$, on remarque que $\frac{u}{v} = u\frac{1}{v}$ et il suffit alors de combiner les propriétés du produit et de l'inverse.
Dans les cases $\pm\infty$ le signe est facile à déterminer par la règle des signes.
Dans les cases $\pm\infty^*$ il faut se référer aux trois cas vus pour l'inverse d'une suite de limite nulle : selon le signe de v, soit il n'y a pas de limite soit la limite est infinie.

$\lim u$ \ $\lim v$	$l' \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$l \in \mathbb{R}^*$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty^*$	0
0	0	FI	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty^*$	FI

Composition avec une fonction

Proposition 7.

Soient l et a des réels pouvant aussi valoir $\pm\infty$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{x\to l} f(x) = a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = a$

Puissances Il faut revenir à une notation exponentielle pour déterminer la limite de u^v.

Exemple 9. Donner la limite éventuelle des suites de terme général :

1. $-3n^2$ 2. e^{-n} 3. $-3n^2+\mathrm{e}^{-n}$ 4. $n^{0.0001}-1000000000$ 5. $\left(n^2+\dfrac{1}{n}\right)(\mathrm{e}^{-n}+2)$ 6. $\dfrac{e^{-n}}{-3n^2}$ 7. $\dfrac{-3n^2}{e^{-n}}$ 8. $\left(\dfrac{1}{n^3}+0.5\right)^n$

4 Croissances comparées. Techniques sur les formes indéterminées

Voici les cas où l'indétermination d'une limite est levée directement d'après le cours.

Proposition 8. Croissances comparées ♡

Soient α et β deux nombres réels. Soit q un réel supérieur strictement à 1.

1. La suite $(n!)$ l'emportent sur les suites (q^n), (n^α) et $\left((\ln n)^\beta\right)$.
2. Les suites (q^n) l'emportent sur les suites (n^α) et $\left((\ln n)^\beta\right)$.
3. Les suites (n^α) l'emportent sur les suites $\left((\ln n)^\beta\right)$.

Cela signifie que si on effectue un **produit ou un quotient** de deux de ces suites, la limite est celle de la suite qui l'emporte.

Exemple 10. ✎ Donner la limite des suites de terme général : 1. $\dfrac{\ln(n)}{n}$ 2. ne^{-n} 3. $\dfrac{n^{10000}}{(1,1)^n}$ 4. $\ln(n)n^{-15}(1,1)^n$.

Méthode. Bases pour lever une forme indéterminée ♡

1. S'assurer qu'on a bien affaire à une forme indéterminée.
2. Si c'est une croissance comparée, conclure directement en rédigeant « par croissance comparée »sur la copie.
3. Sinon, se ramener à un des deux cas précédents par une des méthodes suivantes :
   (a) factorisation par le terme prépondérant (très générale)
   (b) méthode de la quantité conjuguée (plus marginale)

Remarque . A noter qu'il existe des calculs de limite qui nécessite des méthodes bien plus complexes, voire pour lesquels on ne connait pas encore de méthode !

Exemple 11. ✎ Dans chacun des cas, trouver la limite de la suite de terme général :

1. n^5-n^2+3 2. $e^n-n^{100}-\ln(n)^{10000}$ 3. $\dfrac{-2n^3+2n}{n^2}$ 4. $\dfrac{-2n^3+2n}{n^3}$ 5. $\dfrac{-2n^3+2n}{n^4}$ 6. $\sqrt{4n^2+n}-n$ 7. $\sqrt{4n^2+n}-2n$.

V Propriétés des limites et théorèmes de convergence pour les suites

Les notions de la partie précédente ne permettent pas d'étudier la nature de toutes les suites que vous rencontrerez. En effet, tous les résultats précédents portent sur les suites explicites et sur des combinaisons de suites qui possèdent toutes des limites.

Dans cette partie, nous donnons des résultats plus qualitatifs sur les suites et leurs limites qui permettent notamment de conclure lors de l'étude des suites récurrentes.

1 Passage à la limite dans les égalités et les inégalités

Dans cette section, il est très important de remarquer qu'on considère des suites dont **on sait déjà qu'elles convergent**. Aucun des résultats qui suit ne peut donc servir à prouver l'existence d'une limite. En revanche, ces résultats peuvent donner la valeur potentielle d'une limite ou simplement un encadrement de cette valeur potentielle.

Proposition 9.Passage à la limite dans une inégalité

(u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n \leqslant v_n$ ou bien $u_n < v_n$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. (⚠*les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite*).

Exemple 12. ✎ Que peut-on déduire des éventuelles limites des suites définies aux points 3 et 4 de l'exemple 5 ?

Proposition 10.Passage à la limite dans une égalité

Si u a une limite l (finie ou infinie) alors toutes les sous-suites $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$ ont aussi pour limite l.

Exemple 13. ✎ Quelles sont les limites (finies ou infinies) possibles des suites vérifiant les relations de récurrence suivantes ?

1. $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{n}$ 2. $v_{n+1} = -2v_n - \frac{1}{n} + 1$ 3. $2(w_{n+2})^2 = w_{n+1} + w_n$ 4. $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ 5. $x_{n+1} = -\dfrac{1}{x_n}$

Méthode. « du point fixe »

Soit u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une application **continue** sur un intervalle I (de la forme $[a\,;b]$, $[a\,;+\infty[$, $]-\infty\,;b]$ ou $]-\infty\,;+\infty[$ avec a et b réels), tel que I contient tous les termes de la suite. Si u converge vers une limite ℓ, cette limite est une solution de l'équation $\ell = f(\ell)$ sur I (on dit que ℓ est un *point fixe* de f). En effet, $u_{n+1} \longrightarrow \ell$ et $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$ par continuité de f.
⚠ cette méthode permet de trouver des limites potentielles mais ne prouve en aucun cas la convergence de u.

2 Théorèmes de comparaison

Proposition 11.Comparaison par rapport à une suite divergente ♡

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$. Alors :

1. si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) aussi. ♡
2. si (v_n) diverge vers -∞ alors (u_n) aussi.

Exemple 14. ✎ 1. Étudier la limite des suites de terme général (a) $u_n = 3\times(-1)^n - 3n$ (b) $u_n = n^4(5-4(-1)^n)$ 2. Soit (u_n) défine par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant n$ et en déduire la limite de la suite.

Proposition 12.Théorème d'encadrement ou des gendarmes ♡

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

1. $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
2. (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l .

Alors (v_n) converge aussi vers l .

Exemple 15. ✎ Étudier la limite de la suite (u_n) définie, pour tout entier par : $u_n = \dfrac{3n + 5\times(-1)^n}{2n}$.

3 Critère de convergence monotone

Théorème 13.Convergence monotone ♡

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.
Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Remarque . ⚠**ce théorème ne donne pas la limite de la suite**.

Exemple 16. ✎ 1. Donner un exemple de suite croissante qui diverge, et de suite majorée qui diverge.
2. Dire si les suites définies ci-dessous convergent
(a) les suites définies aux points 3 et 4 de l'exemple 5. Donner la valeur de la limite dans le premier cas.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
(c) Conjecturer la monotonie et un minorant de la suite u à partir du graphique de la méthode 1. Démontrer les conjectures puis la convergence de la suite u et calculer sa limite.

4 Suites adjacentes

Définition. Les suites u et v sont dites *adjacentes* si et seulement si :
1. la suite u est croissante. 2. la suite v est décroissante. 3. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Théorème 14. Des suites adjacentes ♡

Si u et v sont adjacentes, elles convergent vers la même limite ℓ. De plus $u_n \leqslant \ell \leqslant v_m$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Exemple 17. Soient u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

1. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En considérant $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$, calculer la limite des suites u et v.

VI Raisonnement par récurrence

a Récurrence simple

Proposition 15.Principe de Récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.
- ⋆ Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (initialisation)
- ⋆ et si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ (hérédité).

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

On admet cette proposition qui reprend le principe des dominos. Si on fait tomber le premier domino et que, dès qu'un domino tombe il entraîne le suivant dans sa chute, alors tous les dominos vont tomber.

En langage mathématique, cela donne : imaginons avoir démontré $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ pour tout $n \geqslant 0$.

On a $\mathcal{P}(0) \xRightarrow{\text{hérédité}, n=0} \mathcal{P}(1)$, or $\mathcal{P}(0)$ est vraie (initialisation), donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On a $\mathcal{P}(1) \xRightarrow{\text{hérédité}, n=1} \mathcal{P}(2)$, or $\mathcal{P}(1)$ est vraie (étape précédente), donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

On a $\mathcal{P}(2) \xRightarrow{\text{hérédité}, n=2} \mathcal{P}(3)$, or $\mathcal{P}(2)$ est vraie (étape précédente), donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie...

Méthode. Rédiger une récurrence

En pratique :
1. on énonce clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$ à prouver.
2. initialisation : on démontre l'assertion $\mathcal{P}(n_0)$
3. hérédité : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour *un* entier $n \geqslant n_0$, et on déduit de cette hypothèse la propriété au rang $n+1$: $\mathcal{P}(n+1)$.
4. conclusion : on conclut que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple 18. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^n \geqslant n+1$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: $2^n \geqslant n+1$.

Initialisation : pour $n=0$, on a $2^0 = 1 \geqslant 0+1 = 1$

Hérédité : supposns que propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier fixé n, c'est à dire, $2^n \geqslant n+1$ (c'est l'hypothèse de récurrence), montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$. En effet,

$$\begin{aligned} 2^n \geqslant n+1 &\Rightarrow 2 \times 2^n \geqslant 2(n+1) \\ &\Rightarrow 2^{n+1} \geqslant 2n+2 \\ &\Rightarrow 2^{n+1} \geqslant (n+1+1)+n \\ &\Rightarrow 2^{n+1} \geqslant (n+1+1) \text{ puisque } n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On en conclu que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n+1$$

□

b Récurrence double

Proposition 16.

La démonstration par récurrence double (ou d'ordre 2) consiste à :

1. Vérifier que la propriété est vraie pour les deux premiers rangs n_0 et n_0+1.
2. Vérifier que si $n \geqslant n_0$ est un entier quelconque tel que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$ alors elle est vraie au rang $n+2$. Autrement dit, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$

Alors la propriété est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Exemple 19. ✎ On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n \geqslant 0$.

c Récurrence forte

Proposition 17.

La démonstration par récurrence forte consiste à :

1. Vérifier que la propriété est vraie pour le premier rang n_0
2. Vérifier que si $n \geqslant n_0$ est un entier quelconque tel que la propriété est vraie jusqu'au rang n (c'est-à-dire que la propriété est vraie pour tout $k \in [\![n_0\,;n]\!]$), alors elle est vraie au rang $n+1$. Autrement dit, $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \mathcal{P}(n_0+2), \cdots,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Alors la propriété est vraie pour tout n.

Exemple 20. ✎ On pose $u_1 = 3$ et pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$.

1. calculer $u_2,\ u_3$ et u_4.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1,\ u_n = 3n$.