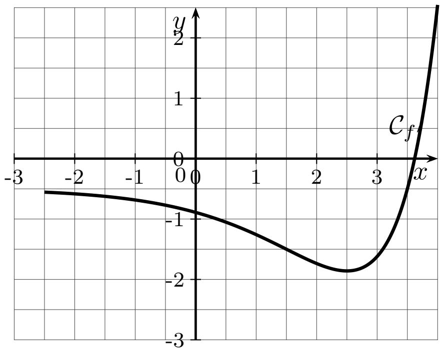
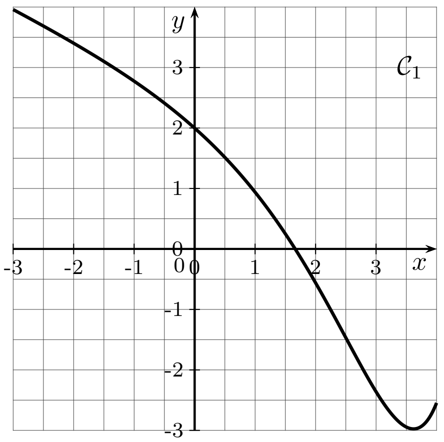
Exercice 1 (Un peu de lecture graphique)

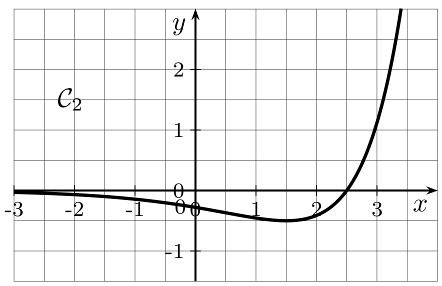
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. La courbe représentative **de la fonction dérivée notée $\mathcal{C}_{f'}$ est donnée ci dessous**. La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique : (a) Résoudre $f'(x) = 0$. (b) Résoudre $f''(x) = 0$.

2. Une des deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.





   (a) Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f''.
   (b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
   (c) Donner les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de f et une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente en ce point à la courbe.

Exercice 2 (Étude de fonctions)

Réaliser l'étude complète (tableau de variation, convexité) des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x} + x$ 2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2\, e^{-2x}$ 3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ 4. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x^2}$

Exercice 3

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I. Quelles sont les fonctions qui sont C^1 sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions sur son intervalle de dérivabilité

$$I=\mathbb{R}_+,\quad a(x)=\sqrt{x}e^{-x} \qquad I=\mathbb{R}_+,\quad b(x)=\ln(1+\sqrt{x})$$

$$I=\mathbb{R}_+,\quad c(x)=\begin{cases} x^2\ln x & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases} \qquad I=\mathbb{R}_+,\quad d(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1} & \text{si } x>0\\ \dfrac{3}{2} & \text{si } x=0\end{cases}$$

$$I=\mathbb{R}_+,\quad e(x)=\begin{cases} \exp(x\ln x) & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases} \qquad I=]-\infty,1],\quad f(x)=x\sqrt{1-x}$$

$$I=[-1,1],\quad g(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2} \qquad I=\mathbb{R},\quad h(x)=\ln(e^{2x}-2e^x+3)$$

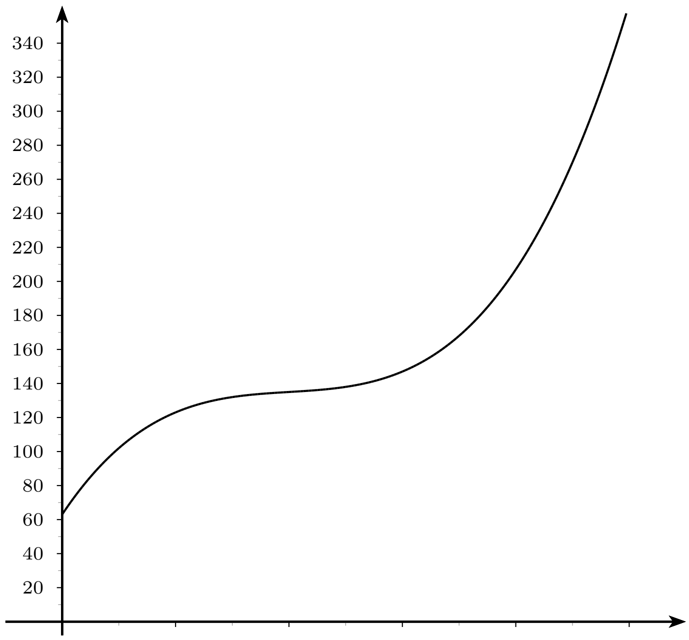
$$I=]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[,\quad i(x)=x\sqrt{x+x^2} \qquad I=\mathbb{R}_+,\quad j(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x-1} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Exercice 4 (Exercice appliqué à l'économie (d'après MATH@ES))

Soit C_T la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;10]$ par

$$C_T(x)=x^3-12x^2+50x+63.$$

La fonction C_T modélise sur l'intervalle $]0;10]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque jour. Elle est représentée ci-contre.



PARTIE A : Étude du coût total

1. Par lecture graphique :
   (a) sur quel intervalle la fonction C_T semble-t-elle convexe ? concave ?
   (b) La courbe a-t-elle un point d'inflexion ?
2. On note C' la dérivée de la fonction C_T.
   (a) Calculer $C'(x)$. (b) Étudier les variations de C'. (c) Démontrer les résultats du 1.

PARTIE B : Étude du coût moyen

On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $C_M(x)=\dfrac{C_T(x)}{x}$. La fonction C_M mesure le coût moyen de production, exprimé en euros, par article fabriqué.

1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe (Γ).
   (a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C_M(a)$
   (b) Conjecturer à l'aide du graphique les variations de la fonction C_M
2. Le coût marginal, coût d'une unité supplémentaire produite est assimilé à la dérivée du coût total. Graphiquement, comparer le coût marginal et le coût moyen minimal.
3. On désigne par C'_M la dérivée de la fonction C_M.
   (a) Calculer $C'_M(x)$.
   (b) Montrer que l'équation $C'_M(x)=0$ admet une solution unique α. Déterminer une approximation de α.
   (c) Étudiez les variations de la fonction C_M.
   (d) En déduire le prix de vente minimal, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?

4. Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.

PARTIE C : Rendements marginaux et d'échelles

On dit que les rendements marginaux sont décroissants lorsque le coût marginal est croissant.
On dit que les rendements d'échelles sont décroissants lorsque le coût moyen est croissant.
Déterminer les valeurs à partir desquelles ces rendements deviennent décroissants.

Exercice 5

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$
3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. En déduire que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(0)$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f (limites incluses) et tracer dans un repère orthormée $\mathcal{C}_f$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
4. En quels points sa réciproque est-elle dérivable ?
5. Calculer $(f^{-1})'(0)$, $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(-\frac{1}{4})$.
6. Déterminer $(f^{-1})'(x)$ lorsque f^{-1} est dérivable en x.
7. Soit $x \in f(\mathbb{R})$. Déterminer son antécédent par f. En déduire f^{-1}.
8. Retrouver directement les résultats de la question 4.
9. Tracer dans le même repère que la question 4 $\mathcal{C}_{f^{-1}}$

Exercice 7

Soit f la fonction définie $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x\ln x$.

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire que f réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que à expliciter.
3. En quel point f^{-1} est-elle dérivable ?
4. Calculer $(f^{-1})'(0)$, $f(e)$ et $f(e^2)$. En déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.
5. Tracer dans un même repère orthonormé $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

Exercice 8

Soit la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+1}$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{2x}{3x+1}$.

1. (a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que $\forall x \geqslant \dfrac{1}{3}, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$
   (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que ses points fixes.
   (c) Montrer que $[0, 1/3]$ et $[1/3, +\infty[$ sont des intervalles stables par f.
2. On suppose dans cette question $u_0 \in [1/3, +\infty[$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1/3$ puis étudier la monotonie de la suite u.
   (b) En déduire sa convergence ainsi que sa limite.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1/3| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 1/3|$
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1/3| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - 1/3|$.
   (e) On suppose $u_0 = 5$. Comment choisir n pour être sûr que $\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant 10^{-4}$?

Exercice 9

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$. On pose $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$.

1.
   (a) Etudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
   (b) Montrer que $\forall x \in [1, 2], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et conclure.
   (d) Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?

Exercice 10

Soit u la suite définie par $u_0 \in [3; 4]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \dfrac{\ln u_n}{4}$. On pose $f(x) = 4 - \dfrac{\ln x}{4}$.
Données numériques : $f(4) \simeq 3.65 \pm 10^{-2}$ et $f(3) \simeq 3.72 \pm 10^{-2}$

1. (a) Etudier la fonction f et montrer que l'intervalle $[3; 4]$ est stable par f.
   (b) Montrer que f possède un unique point fixe L sur l'intervalle $[3; 4]$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [3; 4], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{10}$.
2. (a) Vérifier que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1} - L| \leqslant \dfrac{1}{10}|u_n - L|$ puis que $|u_n - L| \leqslant \dfrac{1}{10^n}$.
   (b) Que peut-on dire de la convergence de la suite u ?
   (c) En choisissant $u_0 = 3$, déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - L| \leqslant 10^{-9}$.

Exercice 11

1. Montrer que l'équation $x = 2 - 2e^{-x}$ admet une unique solution $r > 0$. Vérifier que l'on a : $1 \leqslant r \leqslant 2$.
2. On considère la suite u définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n}$
   On introduit également la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - 2e^{-x}$
   (a) Justifier que $[1, r]$ est stable par f et déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $[1, r]$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, r]$ et donner la monotonie de u.
   (c) Justifier que la suite u converge vers r
3. (a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - r|$ puis que $|u_n - r| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$
   (b) Comment choisir n pour que $|u_n - r| \leqslant 10^{-9}$?

Exercice 12

On souhaite déterminer le nombre de solutions de $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi qu'une valeur approchée d'une des racines.

1. Montrer que l'équation (E) admet trois solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$
2. Obtention d'approximation de β.
   (a) Justifier que $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ et montrer que β est aussi solution de l'équation $\frac{x^3 + 1}{3} = x$
   (b) On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$.
   Montrer que l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par g et que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \quad |g'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
   On considère alors la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, \frac{1}{2}]$
   (d) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \beta|$ puis que $|u_n - \beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$.
   (e) Pour quelles valeurs de n est-on certain que $|u_n - \beta| \leqslant 10^{-9}$? En déduire une valeur approchée à 10^{-9} près de β.

Exercice 13 [EML 2001]

On considère l'application $f \ :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $]0; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1.
   (a) Calculer $f'(x)$
   (b) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$
   (c) Etudier les variations de la fonction $g \ : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par :
   $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$. En déduire : $\quad \forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) > 0$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f (on admettra que $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\to} -\frac{1}{2}$).

3. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} \quad$ et $\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$.
   (c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$.
   (d) Etablir que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14

Encadrer les nombres suivants à l'aide du théorème des accroissements finis : $A = \sqrt{10001} - 100$, $B = \frac{1}{0,99} - 1$, $C = \ln(1,01)$

Exercice 15

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$
2. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 16

Prouver à l'aide d'arguments de convexité les inégalités suivantes :

$$(1)\ \forall x \in [1\,;2],\ (x-1)\ln(2) \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1 \qquad (2)\ \forall x \in]0\,;1],\ x+1 \leqslant \exp(x) \leqslant (e-1)x + 1$$

Exercice 17

1. Montrer que la fonction $f\ :\ ]1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln(ln(x))$ est concave.
2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall (x;\ y) \in]1\,;+\infty[^2; ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1[$ par $f(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0\,;1[$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;1[$.
3. Étudier la convexité de f sur $]0\,;1[$.
4. Montrer que f possède un unique point d'inflexion et déterminer la tangente de f en ce point.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Pour aller plus loin

Exercice 19

Soit $p > 1$ un nombre entier. On définit la suite $(R_n)_{n \geqslant 1}$ par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}.$$

Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite $(R_n)_{n \geqslant 1}$.

1. Montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

   En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\ln(1+k) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\ln\left(\dfrac{pn+1}{n+1}\right) \leqslant R_n \leqslant \ln p$
3. Conclure.

Exercice 20

Calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ puis } x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 21

Montrer que la dérivée d'ordre n de $x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}$ est

$$(-1)^n x^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}$$