

Exercice 11

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.
2. Supposons, par l'absurde, que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, c'est à dire que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel.

On a, d'après 1), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Par passage à la limite on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ qui est impossible car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$.

Donc la série "harmonique" $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$ diverge.

Exercice 12

On considère la série $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ et on note S_n la n-ième somme partielle de cette série.

1. $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ est une série à termes strictement positifs, donc sa suites de somme partielles est strictement croissante.
2. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $e^k + e^{-k} \geq e^k$ car $e^{-k} \geq 0$. Le passage par l'inverse donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq \frac{1}{e^k} = e^{-k}.$$

3. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq e^{-k} = \left(\frac{1}{e}\right)^k$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$

4. La série $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ converge par comparaison avec la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Par passage à la limite dans l'inégalité de la question 3) on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

Pour aller plus loin

Exercice 13

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α , la nature de la série de terme général u_n défini par

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n^2 + k)^\alpha}$$

On a pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\frac{1}{(2n^2)^\alpha} = \frac{1}{(n^2 + n^2)^\alpha} \leq \frac{1}{(n^2 + k)^\alpha} \leq \frac{1}{(n^2)^\alpha}$, soit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n^2)^\alpha} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n^2)^\alpha}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha-1}} \leq u_n \leq \frac{1}{n^{2\alpha-1}}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^{2\alpha-1}}$ converge si, et seulement, si $2\alpha - 1 > 1$, c'est à dire, $\alpha > 1$. Il découle alors des théorèmes de comparaison que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 14

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \min(u_n, v_n), \sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ et } \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

On a pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\min(x, y) \leq \sqrt{xy} \leq \max(x, y) \leq x + y$ et $\frac{xy}{x+y} \leq x$.

En effet, $(\min(x, y))^2 = \min(x, y) \times \min(x, y) \leq xy \leq (\max(x, y))^2 \Rightarrow \min(x, y) \leq \sqrt{xy} \leq \max(x, y)$,

et comme $\max(x, y) = x$ ou $\max(x, y) = y$, on a $\max(x, y) \leq x + y$. Pour la deuxième inégalité, on a $\frac{y}{x+y} \leq 1 \Rightarrow \frac{xy}{x+y} = x \frac{y}{x+y} \leq x \times 1 = x$.

En remplaçant x et y par u_n et v_n on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\min(u_n, v_n) \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n \quad (1)$$

et

$$\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leq u_n \quad (2)$$

Comme $\sum u_n + v_n$ et $\sum u_n$, il résulte de 1), 2) et du théorème de comparaison que les séries $\sum \min(u_n, v_n)$, $\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ convergent.

Exercice 15

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs convergente.

1. Montrons que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq 2a_n \Leftrightarrow a_n \geq \frac{1}{2^n}$$

En effet, on a :

$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq 2a_n \Leftrightarrow a_n^{-\frac{1}{n}} \leq 2 \Leftrightarrow (a_n^{-\frac{1}{n}})^{-n} \geq 2^{-n} \Leftrightarrow a_n \geq \frac{1}{2^n}$$

Montrons que

$$a_n \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

En effet, comme $1 - \frac{1}{n} \geq 0$, on a :

$$a_n \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1-\frac{1}{n}} \quad \text{Or} \quad \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Donc

$$a_n \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

2. Supposons que $a_n \geq \frac{1}{2^n}$, on aurait, d'après 1), $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq 2a_n$ et en particulier $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Supposons que $a_n < \frac{1}{2^n}$, on aurait d'après 1) $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et en particulier $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Dans tous les cas on a $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

3. Les séries $\sum 2a_n$ et $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ convergent, donc $\sum \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ converge aussi (voir exercice 14).

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, on a d'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.