Exercice 1

Reconnaître des suites. Pour chacune des suites suivantes :

1. Dire si elle est arithmétique ou géométrique et préciser sa raison 2. Donner sa forme expilcite. 3. Donner son premier terme et une définition par récurrence. 4. Exprimer $u_0 + \dots + u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (*certaines de ces infos sont contenues dans l'énoncé...*)

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $a_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $b_0 = -1$ et $b_{n+1} = 3b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $c_n = \frac{n+1}{3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $d_0 = -1$ et $d_{n+1} = d_n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique tq $e_3 = 5$ et $e_8 = 20$.
6. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison 2 tq $f_3 = 128$.
7. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 4.
8. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique tq $h_{10} = 10$ et $h_{12} = 20$.

Exercice 2

[**Démonstration par récurrence**]

1. Calculer les premiers termes de la suite :$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$ puis conjecturer une formule explicite et la démontrer par récurrence.
2. On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n - 11, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an^2 + bn + c$, où a, b et c sont trois nombres réels à préciser.

Exercice 3

[**Expression explicite d'une suite arithmetico-géométrique**]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 6 - \frac{1}{2}u_n$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Représenter les droites d'équation $y = x$ et $y = 6 - 0,5x$, puis conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et les variations de la suite.
3. Donner une expression explicite de u_n pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 4

[**Suites couplées**]

On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in N}$ par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$, puis pour $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

1. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = b_n - a_n$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme à préciser.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 4b_n + 3a_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est constante.
   (b) Préciser quelle est la valeur constante de v_n.
3. A l'aide des questions 1(b) et 2(b) , calculer les expressions de a_n et b_n pour tout entier naturel n.
4. Calculer $S_n = b_0 + b_1 + ... + b_n$ en fonction de n.

Exercice 5

[**Ecriture rationnelle vs écriture périodique**]

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}27$ et de raison $\frac{1}{100}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, pour $n \in \mathbb{N}$.

A l'aide de ces outils, donner l'écriture rationnelle de $0,272727....$ Adapter la méthode pour démontrer que $0,999.... = 1$

Exercice 6

[**Une suite homographique**]

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n - 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}$.

On admet que les termes u_n et v_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 7

[**Changement de suites divers**]

1. Soit u la suite définie par : $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}u_n$

(a) Montrer que la suite v définie par : pour tout entier $n \geqslant 1 v_n = \dfrac{n+1}{n}u_n$ est géométrique. (b) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

2. Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$.

(a) Montrer que pour tout entier n, u_n est défini et $u_n > 1$.

(b) Montrer que la suite v définie par $v_n = \ln(u_n - 1)$ est définie et est géométrique.

(c) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \ln u_n$.

(a) Montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: « u_n défini et $u_n > 0$ » (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 1, v_{n+1} = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n$.

(c) Déduire les termes généraux de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Le vérifier en calculant de 2 manières u_1 et u_2.

(d) Étudier la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 8

[**Comparaison avec une suite géométrique**]

1. Soit u telle que $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant 2u_n$ Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 3 \cdot 2^n$ Étudier la convergence.

2. Soit v positive telle que $v_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}v_n$ Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant 3 \cdot (\frac{1}{2})^n$ Étudier la convergence.

Exercice 9

[**Limite de suite (classique)**]

Soit u de terme général $\dfrac{n!}{a^n}$.

1. **Si 0⩽a⩽1 :**. Déterminer la limite de u.
2. **Si a>1 :** (a) Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2$. (b) Déduire que si $n \geqslant n_0$ alors : $u_n \geqslant 2^{n-n_0}u_{n_0}$.
   (c) Déduire la limite de u.

Exercice 10

[**Suite récurrente (classique)**]

Soit u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. Étudier le polynôme $P(X) = X^2 - X - 12$ (factorisation, signe, solutions de $P(x) = 0$)
2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n est défini et $0 < u_n < 4$"
3. Montrer par récurrence que u est strictement croissante.
   Variante astucieuse : combiner une quantité conjuguée avec la question 1.
4. (a) Déduire que u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. (b) Déduire de la question 2 un encadrement de l.
   (c) Montrer que l vérifie $P(l) = 0$. (d) Déduire des questions précédentes la valeur de l.

Exercice 11

[**Limites de suites**]

1. Calculer la limites des suites suivantes, par la méthode de votre choix.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} - 2$ | (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n - 2n^3}{n^2+1}$. | (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 3(-1)^n}{2n}$

2. Dans ces questions, on veut démontrer "à la main" plusieurs résultats qui sont utilisés dans la pratique :
   (a) On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

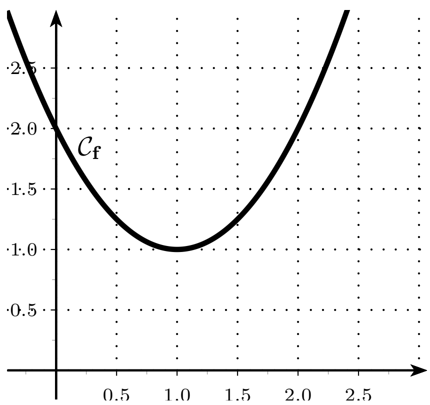
   i. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$ | ii. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

   (b) Soit $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$.

Exercice 12

[**Suite récurrente et conjecture graphique**]

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$. $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est représentée ci-dessous



1. Conjectures graphiques
   (a) **Construire** les points $M_0\,(u_0; 0)$, $M_1\,(u_1; 0)$, $M_2\,(u_2; 0)$, $M_3\,(u_3; 0)$ et $M_4\,(u_4; 0)$ sur le graphique ci-dessus (*sans faire de calculs et en laissant apparents les traits de construction*).
   (b) Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sur sa convergence ?
2. Démonstration des conjectures précédentes.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Donner une expression factorisée de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite.
   (c) Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 13

[**Suite et absurde**]

Soit f définie par : $f(x) = \ln(x) + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Etudier les variations de f. (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$.
2. Soit u la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Montrer que pour tout entier n : $u_n \geq 1$ et en déduire que la suite est croissante.
   (b) Montrer qu'elle n'est pas majorée est déterminer sa limite.
   On suppose à présent que $u_0 = e$
   (c) Montrer que, pourt tout entier n : $u_{n+1} \geq u_n + 1$, en déduire que $u_n \geq n + e$ et retrouveer la limite de la suite.
3. Soit v définie par $v_0 \in]0, 1[$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = f(v_n)$
   Montrer qu'il existe un entier n pour lequel $v_n < 0$ et en déduire qu'elle n'est plus défnie à partir de $n+1$.

Exercice 14

[**Suite définie par une somme**]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$.

1. Quels sont les plus petit et plus grand terme de la somme ? En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$
2. A l'aide de la question précédente, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Exercice 16

[**Différentes méthodes**]

Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et les relations suivantes. $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

Les questions 2, 3 et 4 permettent de déterminer le terme général de ces suites de 3 manières indépendantes.

1. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2
2. **Méthode 1 :**
   (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = a_n + b_n$. Montrer que (s_n) est géométrique et déterminer son terme général.
   (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = a_n - b_n$. Montrer que (d_n) est constante et déterminer son terme général.
   (c) Déduire en résolvant un système les termes généraux de (a_n) et (b_n).
3. **Méthode 2 :**
   (a) En combinant les relations (1) et (2) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$
   (b) Déterminer le terme général de (a_n).
   (c) Déduire celui de (b_n) à l'aide de la relation de récurrence (1)
4. **Méthode 3 :**
   (a) Soit X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$
   (b) On définit la suite (α_n) par $\alpha_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + 1 \end{pmatrix}$
   (c) Déterminer le terme général de (α_n)
   (d) Déduire les termes généraux de (a_n) et (b_n)

Exercice 17

[**Suite et puissance de matrice**]

Soit u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Soit $D = P^{-1}AP$. Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$ et déduire une expression de A^n.
4. Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$
5. Déduire une expression de X_n en fonction de A^n et X_0. Puis déduire le terme général de u.

Exercice 18

[**Puissance de matrice et récurrence - EML 2003**]

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels tel que :
   $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.
   (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   (c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 19

[**Suites et matrices**]

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$.
2. Calculer u_n en fonction de n puis expliciter A^n.

Exercice 20

[**D'après ECRICOME T 2007**]

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence : $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \end{array}\right.$

sans utiliser les résultats du cours sur les suites récurrentes doubles. On définit la matrice A par : $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcul de la puissance n-ème de A

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par : $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer BC et CB et B^2. Qu'en déduire pour $B^n, n \in \mathbb{N}^*$?
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul : $C^n = (-1)^{n-1}C$
3. Vérifier que l'on a : $A^2 = 5A - 6I$, où I est la matrice carrée unité d'ordre 2.
4. Etablir que la matrice A est-inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.
5. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $A^n = 3^nB - 2^nC$
6. La relation précédente est-elle encore vraie pour $n = -1$. C'est-à-dire a-t-on : $A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C$?
7. Montrer que pour tout entier naturel n : $\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$

Expression de u_n en fonction de n

1. Vérifier que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Donner ainsi l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 21

[Suites et matrices]

Système linéaire de deux suites récurrentes : on note A, P, D les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit les suites (x_n) et (y_n) par : $\begin{cases} x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -4x_n \end{cases} \end{cases}$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}. Vérifier que l'on a $D = P^{-1}AP$.
2. Donner, sans démonstration, l'expression de D^n pour n entier naturel.
3. Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D, puis montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$
   En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.
4. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^nU_0$. En déduire l'expression de x_n et y_n en fonction de n.

Puissance d'une matrice : Soient B et I_3 les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $B^2 = 5B - 4I_3$.
2. Pour n entier naturel on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels a_n et b_n tels que $B^n = a_nB + b_nI_3$ ».
   (a) Montrer que $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ sont vraies et déterminer les couples (a_0, b_0), (a_1, b_1), et (a_2, b_2).
   (b) On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (c) Utiliser la première partie de l'exercice pour exprimer a_n et b_n en fonction de n.
   (d) Conclure en donnant l'écriture matricielle de B^n.

Exercice 22

[Suites adjacentes]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k-1}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} = \dfrac{-2}{(4n+1)(4n+3)}$

   (b) Montrer que la suite v de terme général $v_n = u_{2n}$ est décroissante. *On utilisera le cas particulier de Chasles :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2}$

2. Montrer de même que la suite w de terme général $w_n = u_{2n+1}$ est croissante. *On utilisera le cas particulier de Chasles :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+3} = \sum_{k=1}^{2n+1} + \sum_{k=2n+2}^{2n+3}$.
3. Calculer (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) $w_n - v_n$ puis donner la limite de cette suite.
4. Montrer que v et w convergent vers une même limite l.

   Épilogue : Lorsque $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite l, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l aussi. Nous avons donc démontré dans cette exercice que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 23

[Changement de suite (difficile) ECRICOME 1999]

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation : $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}x_{n+1} + \dfrac{1}{3}x_n$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ (on donne : $\frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0,77$ et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0,44$ à 10^{-2} près).
2. Soient $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geqslant 1$

   Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.
3. Soit (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.

   (a) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

   (b) Vérifier, pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$. En déduire que : $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$.

   (c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}x_{n+1} + \dfrac{1}{3}x_n$.

   Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 24

[Suites adjacentes (difficile)]

1. (a) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+1}{x}$ et g la composée $g = fof$ définie par $g(x) = f(f(x))$. Etudier les sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de f et de g.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de $f(x) = x$, puis $g(x) = x$. (On montrera qu'elles ont les mêmes solutions solutions a et b avec $b < 0 < a$, que $b = -1/a$ et que $b = 3 - a$)

Soit u la suite définie par : $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer que, $\forall n$, $u_n$est défini et $u_n > 0$

3. On suppose dans cette question que $u_0 = 1$. On définit les suites v et w par : $\forall n$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$.

(a) Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = g(v_n)$.

(b) Montrer que la suite v et croissante majorée par a. En déduire que v converge vers a.

(c) En déduire que w converge également vers a. Conclure pour u en utilisant le résultat suivant, admis :

si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors u converge vers cette limite.

4. On pose pour tout entier n, $z_n = \dfrac{u_n - a}{u_n - b}$. (les valeurs a et b étant celles définies précédemment).

On ne suppose plus que $u_0 = 1$ mais seulement que $u_0 > 0$.

(a) Montrer que, pour tout entier n, $z_n$est bien définie et que z est une suite géométrique.

(b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de z_n. Déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercices faits au tableau

Exercice 25

[Critère de d'Alembert]

Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $a \in]1\,;\infty[$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$.
   (a) Montrer que $u_n \geqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
   (c) En déduire que la suite (S_n) divergente.
2. On suppose que $a \in]0\,;1[$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a$.
   (a) Montrer que $u_n \leqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (c) On note pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$
      i. Montrer que la suite (v_n) est majorée par $\dfrac{1}{1-a}$, puis qu'elle converge.
      ii. En déduire que la suite (S_n) est convergente.
   (d) Application :
   Quelle est la nature des suites de termes général :
   $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{n!}$ où $a \in]0\,;1[$. $\qquad v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{n!}$ où $a \in]1\,;+\infty[$.

Exercice 26

Soient (u_n) et (u_n) les suites définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. Montrer que ces deux suites ont adjacentes, puis qu'elles convergent.

Pour aller plus loin

Exercice 27

[extrait HEC 2013]

Partie I. Prix d'équilibre

Sur le marché d'un certain bien, on note D la fonction de demande globale (des consommateurs), O la fonction d'offre globale (des entreprises) et p le prix de vente du bien.

On suppose habituellement que la fonction $D : p \mapsto D(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est décroissante et que la fonction $O : p \mapsto O(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est croissante.

Si l'équation $O(p) = D(P)$ admet; une solution p^*, on dit que p^* est *un prix d'équilibre du marché.*

Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès d'offre $(O(p)) > D(p))$ ou des excès de demande $(D(p) > O(p))$ au cours du temps.

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la valeur du prix à l'instant n.

On suppose que la demande dépend de 1a valeur du prix selon la relation $D_n = D(p_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la quantité offerte O_n à 1'instant n à un *prix anticipé* à l'instant $(n-1)$, noté $\widehat{p}_n$, selon la relation $O_n = O(\widehat{p}_n)$, où $\widehat{p}_0$ peut être interprété comme un prix d'étude de marché.

On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à 1a demande, c'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n = D_n$.

Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels .strictement positifs a, b, c et d, avec $a > d$, et on suppose que les fonctions D et O sont définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $D(p) = a - bp$ et $O(p) = cp + d$.

Par suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(p_n) = a - bp_n$ et $O(\widehat{p}_n) = c\widehat{p}_n + d$.

1. Dans cette question uniquement, les réels a, b, c et d ont les valeurs suivantes : $a = 40$, $b = 8$, $c = 2$ et $d = 20$.
   On suppose que p_0 et. p_1 sont donnés et que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\widehat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$
   (a) Établir l'existence et l'unicité d'un prix d'équilibre p^*. Calculer p^*.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}$.
   (c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = p_n - p^*$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (d) Calculer les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n en fonction de n, r_1, r_2, p_0, p_1 et p^*.
   (f) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ? Interpréter.
2. Soit β un paramètre réel vérifiant $0 < \beta \leqslant 1$. 0n suppose que le prix p_0 est donné et que les anticipations de prix sont adaptatives, c'est-à dire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\widehat{p}_n = \widehat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \widehat{p}_{n-1})$.
   (a) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prix courant p_n en fonction du prix anticipé $\widehat{p}_n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le prix p_n vérifie 1'équation de récurrence suivante :
   $$p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b}$$
   (c) Quel est le prix d'équilibre p^* ? Déterminer l'expression de p_n en fonction de n, p_0, p^*, b, c et β.
   (d) En supposant que $p_0 \neq p^*$, montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si : $\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1$. Quelle est alors sa limite ?
   (e) Étudier la convergence de 1a suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $c < b$.