

Corrigé proposé par Romain Meurant pour l'APHEC. Toute suggestion permettant de l'améliorer est la bienvenue : romain.meurant@lycee-descartes.ma

1. Question classique !

(a) En écrivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(Y_n \leq x) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x)$$

et par indépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, de même loi que X :

$$G_n(x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = (F(x))^n.$$

(b) La fonction F étant continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en 0 et α , il en est de même de la fonction G_n (la fonction « puissance n » est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), ce qui prouve que la variable aléatoire Y_n est à densité.

Une densité de Y_n est par exemple la fonction g_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = n f(x) (F(x))^{n-1}.$$

(c) La variable aléatoire Y_n étant bornée (à valeurs dans $]0, \alpha[$), elle admet une espérance.

2. (a) « Le deuxième plus grand des nombres $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ est inférieur ou égal à x » signifie exactement que tous ces nombres, sauf peut-être un (le plus grand : $Y_n(\omega)$), sont inférieurs ou égaux à x .
On pourrait écrire :

$$(Z_n \leq x) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i} (X_j \leq x) \right)$$

mais les n événements dont on prend l'union ici ne sont pas incompatibles ; on s'en sort en distinguant le cas où les n nombres sont inférieurs ou égaux à x :

$$(Z_n \leq x) = \underbrace{\left[\bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} (X_i \leq x) \right]}_{=(Y_n \leq x)} \cup \left[\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} \left((X_i > x) \cap \left(\bigcap_{j \neq i} (X_j \leq x) \right) \right) \right]$$

Les $(n+1)$ événements colorés ci-dessus sont deux-à-deux incompatibles :

$$H_n(x) = P(Y_n \leq x) + \sum_{i=1}^n P \left((X_i > x) \cap \left(\bigcap_{j \neq i} (X_j \leq x) \right) \right).$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les n événements $(X_i > x)$ et $(X_j \leq x)$ ($j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$) étant indépendants :

$$H_n(x) = (F(x))^n + \sum_{i=1}^n \left(P(X_i > x) \prod_{j \neq i} P(X_j \leq x) \right)$$

Et enfin, puisque les variables $X_1, \dots, X_n$ suivent la même loi que X :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = (F(x))^n + n(1 - F(x))(F(x))^{n-1}.$$

(b) Comme en 1.(b), la fonction H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en 0 et α , donc la variable aléatoire Z_n est à densité, et une densité est par exemple la fonction h_n définie par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, h_n(x) &= n f(x) (F(x))^{n-1} + n(n-1) f(x) (F(x))^{n-2} - n^2 f(x) (F(x))^{n-1} \\ &= n f(x) (F(x))^{n-2} [F(x) + (n-1) - n F(x)] \\ &= n f(x) (F(x))^{n-2} (n-1) (1 - F(x)) \end{aligned}$$

3. L'idée du programme est :

- regarder, parmi les deux premières valeurs ($X(1)$ et $X(2)$), quelles sont la plus grande et la deuxième plus grande (c'est-à-dire la plus petite !)
- parcourir les valeurs suivantes une à une, et pour chacune ($X(k)$ pour $k \geq 3$) :
 - si on trouve une valeur plus grande que la plus grande de toutes les précédentes, elle devient la nouvelle plus grande et la nouvelle deuxième plus grande est alors l'ancienne plus grande (mais les deux affectations de la ligne 10 sont faites dans l'ordre inverse de cette phrase pour ne pas perdre la valeur de y)
 - sinon, mais si on trouve quand même une valeur plus grande que la deuxième plus grande de toutes les précédentes, cette valeur trouvée devient la nouvelle deuxième plus grande (et la plus grande est toujours la même).

```
function [y,z] = DeuxPlusGrands(n)
X = simulX(n)
if X(1) > X(2)
    y = X(1); z = X(2)
else
    z = X(1); y = X(2)
end
for k=3:n
    if X(k) > y
        z = y; y = X(k)
    end
end
```

```

else
  if X(k) > z
    z = X(k)
  end
end
endfunction

```

4. (a) Avec les contraintes de l'énoncé sur f , il n'y a qu'un seul choix :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la fonction de répartition de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

On en déduit, avec les question 1.(b) et 2.(b) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \begin{cases} n \frac{x^{n-1}}{\alpha^n} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_n(x) = \begin{cases} n(n-1) \frac{(\alpha-x)x^{n-2}}{\alpha^n} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b)

$$E(Y_n) = \int_0^\alpha x g_n(x) dx = \frac{n}{\alpha^n} \int_0^\alpha x^n dx = \frac{n}{\alpha^n} \times \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \alpha.$$

$$E(Z_n) = \int_0^\alpha x h_n(x) dx = \frac{n(n-1)}{\alpha^n} \left(\alpha \frac{\alpha^n}{n} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \right) = n(n-1) \alpha \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n-1}{n+1} \alpha.$$

5. (a) La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \alpha\}$; elle vérifie de plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \int_0^\alpha x^{\lambda-1} dx = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \times \frac{\alpha^\lambda}{\lambda} = 1.$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

Puisque f est nulle en dehors de $]0, \alpha[$, la fonction de répartition de X est nulle sur $] -\infty, 0]$ et vaut 1 sur $[\alpha, +\infty[$.

Pour $x \in [0, \alpha]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \times \frac{x^\lambda}{\lambda} = \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\lambda.$$

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\lambda & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^\alpha \lambda \frac{x^\lambda}{\alpha^\lambda} dx = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \times \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \alpha.$$

(C'est exactement le même calcul qu'en 4.(b).)

- (b) On obtient alors la fonction de répartition de Y_n avec la question 1.(a) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = (F(x))^{n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{n\lambda} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

ce qui correspond, d'après 5.(a)ii., à la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi puissance de paramètres α et $n\lambda$: Y_n suit donc cette loi.

D'après 5.(a)iii. :

$$E(Y_n) = \frac{n\lambda}{n\lambda+1} \alpha.$$

(On a repris l'expression de $E(X)$ en remplaçant λ par λn .)

- (c) Utilisons la question 2.(b) donnant une densité de Z_n pour calculer $E(Z_n)$:

$$E(Z_n) = n(n-1)\lambda \int_0^\alpha \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\lambda \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\lambda \right] \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{(n-2)\lambda} dx.$$

On peut alléger légèrement le calcul avec le changement de variable $u = \frac{x}{\alpha}$:

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= n(n-1)\lambda \alpha \int_0^1 u^\lambda (1-u^\lambda) u^{(n-2)\lambda} du \\ &= n(n-1)\lambda \alpha \left(\int_0^1 u^{(n-1)\lambda} du - \int_0^1 u^{n\lambda} du \right) \end{aligned}$$

(c) Pour tout $x \in]0, \alpha[$, la fonction $y \mapsto \gamma(x, y)$ admet un maximum en $\sigma(x)$ donc sa dérivée s'y annule, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]0, \alpha[, \partial_2(\gamma)(x, \sigma(x)) = 0.$$

On en déduit avec le calcul fait en (b) et en remarquant que $\sigma^{-1}(\sigma(x)) = x$:

$$-G_{n-1}(x) + \frac{x - \sigma(x)}{\sigma'(x)} g_{n-1}(x) = 0$$

soit encore :

$$\sigma'(x) G_{n-1}(x) + \sigma(x) g_{n-1}(x) = x g_{n-1}(x).$$

(d) En reconnaissant dans le membre de gauche ci-dessus une expression de la forme $u'v + uv'$ (avec $u = \sigma$ et $v = G_{n-1}$), on a :

$$\forall x \in]0, \alpha[, (\sigma(x) G_{n-1}(x))'(x) = x g_{n-1}(x)$$

Puisque σG_{n-1} s'annule en 0 :

$$\forall x \in]0, \alpha[, \sigma(x) G_{n-1}(x) = \int_0^x t g_{n-1}(t) dt$$

et on en déduit :

$$\forall x \in]0, \alpha[, \sigma(x) = \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x t g_{n-1}(t) dt.$$

(Notons que G_{n-1} ne s'annule pas sur $]0, \alpha[$ car g_{n-1} y est strictement positive.)

(e) Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto G_{n-1}(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ (g_{n-1} est continue sur $]0, \alpha[$). Il convient donc de se placer sur un segment $[A, x]$ avec $0 < A < x < \alpha$ pour effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} (G_{n-1} \text{ n'est peut-être pas de classe } \mathcal{C}^1 \text{ en } 0) \\ \int_A^x t g_{n-1}(t) dt = \left[t G_{n-1}(t) \right]_A^x - \int_A^x G_{n-1}(t) dt \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $A \rightarrow 0$ (en notant que G_{n-1} étant bornée, $t G_{n-1}(t) \xrightarrow{A \rightarrow 0} 0$) :

$$\forall x \in]0, \alpha[, \sigma(x) = x - \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)} dt.$$

(On ne pouvait pas s'arrêter à la question (d) pour affirmer l'unicité de σ car il n'y a pas unicité d'une densité g_{n-1} de Y_{n-1} .)

7. (a) La fonction $t \mapsto t g_{n-1}(t)$ étant continue et strictement positive sur $]0, x]$, l'intégrale $\int_0^x t g_{n-1}(t) dt$ est strictement positive

$$\begin{aligned} &= n(n-1)\lambda\alpha \left(\frac{1}{1+(n-1)\lambda} - \frac{1}{1+n\lambda} \right) \\ &= n(n-1)\lambda\alpha \frac{1+n\lambda-1-(n-1)\lambda}{(1+(n-1)\lambda)(1+n\lambda)} = \frac{n(n-1)\lambda^2\alpha}{(1+(n-1)\lambda)(1+n\lambda)} \end{aligned}$$

Pour les calculs d'espérance en questions 4. et 5., l'énoncé ne donnant aucune réponse, on pourra faire quelques « tests de vérification » au brouillon ; par exemple :

— Puisque X est à valeurs dans $]0, \alpha[$, il en est de même de Y_n et Z_n . On a aussi l'inégalité $Z_n \leq Y_n$ (par définition du « deuxième plus grand »). Donc, par croissance de l'espérance :

$$0 \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq \mathbb{E}(Y_n) \leq \alpha$$

ce qui est clair pour la question 4., et que l'on peut vérifier pour la question 5. en remarquant que :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \underbrace{\alpha \frac{n\lambda}{n\lambda+1}}_{=\mathbb{E}(Y_n)} \times \underbrace{\frac{(n-1)\lambda}{1+(n-1)\lambda}}_{\leq 1}$$

— On peut aussi vérifier que $\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ et $\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$. (Nous ne l'avons pas démontré mais ceci est assez intuitif : plus le nombre n de valeurs est grand, plus la plus grande et la deuxième plus grande de ces n valeurs sont proches de α .) Ces deux limites sont claires en 4. et en 5., en raisonnant avec des équivalents.

— Pour $n = 2$, on a $Y_2 + Z_2 = X_1 + X_2$ donc $\mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Z_2) = 2\mathbb{E}(X)$. Et en effet :

— pour la question 4. :

$$\mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Z_2) = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha = \alpha = 2\mathbb{E}(X) ;$$

— pour la question 5. :

$$\mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Z_2) = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1} + \frac{2\lambda^2}{(1+2\lambda)(1+\lambda)} \right) \alpha = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \alpha = 2\mathbb{E}(X).$$

— On peut aussi remarquer que les résultats obtenus en 5. lorsque $\lambda = 1$ correspondent aux résultats obtenus en 4. (en effet, la loi puissance de paramètres α et 1 est la loi uniforme sur $]0, \alpha[$).

6. (a) Puisque σ est dérivable et de dérivée ne s'annulant pas, sa réciproque σ^{-1} est dérivable avec :

$$\forall y \in]0, \beta[, (\sigma^{-1})'(y) = \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(y))}.$$

(b) Pour tout $(x, y) \in]0, \alpha[\times]0, \beta[$:

$$\begin{aligned} \partial_2(\gamma)(x, y) &= -G_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) + (x - y)(\sigma^{-1})'(y) G_{n-1}'(\sigma^{-1}(y)) \\ &= -G_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) + \frac{x - y}{\sigma'(\sigma^{-1}(y))} g_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) \end{aligned}$$