emlyon 2019 - Correction

Exercice 1

Partie A : Des résultats préliminaires

1. (a) F_U est une fonction de répartition donc pour tout $t \in [0,+\infty[$, $0 \leq F_U(t) \leq 1$. Par ailleurs f_V est une densité donc pour tout $t \in [0,+\infty[$, $f_V(t) \geq 0$. Ainsi par produit,
$$\forall t \in [0,+\infty[\,, \qquad \boxed{0 \leq F_U(t)f_v(t) \leq f_V(t)}.$$
   (b) La fonction $F_U f_v$ est continue sur $[0,+\infty[$ (comme produit de F_U fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, et de f_V continue sur $[0,+\infty[$ par hypothèse), à valeurs positive sur $[0,+\infty[$ d'après la question précédente. Enfin d'après la question précédente, pour tout $t \geq 0$, $F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt$ converge car f_V est une densité. Ainsi par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)\,dt \text{ converge}}$.

2. La fonction f_V est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)\,dt$ converge et vaut 1 . Par ailleurs f_V est nulle sur $]-\infty,0[$ par hypothèse donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_V(t)\,dt = 0$. Ainsi $1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt$.
En utilisant cette information on peut écrire, par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} P(U>V) &= 1 - P(U \leq V) = 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \big(f_V(t) - F_U(t)f_V(t)\big)\,dt = \boxed{\int_0^{+\infty} f_V(t)\big(1-F_U(t)\big)\,dt}. \end{aligned}$$

3. (a) D'après le cours, pour tout $t \in [0,+\infty[$,
$$\boxed{F_U(t) = 1 - e^{-\lambda t}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f_V(t) = \mu e^{-\mu t}}.$$
   (b) D'après la question 2 :
$$\begin{aligned} P(U>V) &= \int_0^{+\infty} \big(1-F_U(t)\big)f_V(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mu e^{-\mu t}\,dt \\ &= \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \mu\Big[-\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\Big]_0^A \\ &= \lim_{A\to+\infty} \mu\Big(-\frac{e^{-(\lambda+\mu)A}}{\lambda+\mu} + \frac{1}{\lambda+\mu}\Big) \\ &= \boxed{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}, \end{aligned}$$
   car $\lambda+\mu > 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-(\lambda+\mu)A} = 0$.

Partie B : Une application

4. (a) Soit $t \in [0,+\infty[$. On a $[M_n > t] = \bigcap_{i=1}^{n}[T_i > t]$, donc par indépendance de $T_1,\dots,T_n$, puis en utilisant le fait que $T_1,\dots,T_n$ suivent la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$,

$$\begin{aligned} P(M_n > t) &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) = \prod_{i=1}^{n}\big(1 - F_{T_i}(t)\big) = \big(1 - F_{T_1}(t)\big)^n \\ &= (e^{-\lambda t})^n = \boxed{e^{-n\lambda t}}. \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $t \geq 0$,

$$F_{M_n(t)} = 1 - P(M_n > t) = 1 - e^{-n\lambda t}.$$

Par ailleurs pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $T_i(\Omega) = \mathbb{R}^+$ donc $M_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$, par conséquent pour tout $t < 0$, $F_{M_n}(t) = 0$.
Finalement on a montré :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$, donc $\boxed{M_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)}$.

5. (a) $[N = 1] = [T_1 \leq T_0]$ par définition de N.
D'après le résultat admis à la Partie A, puisque T_0 et T_1 sont à densité et admettent une densité nulle sur $]-\infty,0[$,

$$\begin{aligned} P(N=1) &= P(T_1 \leq T_0) = \int_0^{+\infty} F_{T_1}(t) f_{T_0}(t)\,dt = \int_0^{+\infty}(1 - e^{-\lambda t})\lambda e^{-\lambda t}\,dt \\ &= \lambda\int_0^{+\infty}\big(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\big)\,dt = \lambda \lim_{A\to+\infty}\Big[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{e^{-2\lambda t}}{2\lambda}\Big]_0^A \\ &= \lambda\Big(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\Big) = \boxed{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

car $\lambda > 0$ donc $\lim_{A\to+\infty} e^{-\lambda t} = \lim_{A\to+\infty} e^{-2\lambda t} = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $[N > n] \cup [N = 0]$ est l'événement "le plus petit indice $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$, s'il existe, est strictement supérieur à n", c'est-à-dire "pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $T_i > T_0$", c'est-à-dire $[M_n > T_0]$. On a donc $\boxed{[N > n] \cup [N = 0] = [M_n > T_0]}$.
Les variables aléatoires M_n et T_0 étant à densité et admettant une densité nulle sur $]-\infty,0[$, on peut appliquer le résultat de la question 2) :

$$\begin{aligned} P([N > n] \cup [N = 0]) &= P(M_n > T_0) = \int_0^{+\infty}\big(1 - F_{M_n}(t)\big) f_{T_0}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-n\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty}\lambda e^{-(n+1)\lambda t}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\Big[-\frac{e^{-(n+1)\lambda t}}{n+1}\Big]_0^A \\ &= \boxed{\frac{1}{n+1}}, \end{aligned}$$

car $(n+1)\lambda > 0$ donc $\lim_{A\to+\infty} e^{-(n+1)\lambda A} = 0$.

(c) Soit $n \geq 2$ un entier. On a $[N = n] = \big([N > n-1] \cup [N = 0]\big) \setminus \big([N > n] \cup [N = 0]\big)$ donc $P(N = n) = P([N > n-1] \cup [N = 0]) - P([N > n] \cup [N = 0])$, par conséquent d'après la question précédente (on a bien $n - 1 \in \mathbb{N}^*$) :

$$P(N = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \boxed{\frac{1}{n(n+1)}}.$$

(d) On a $N(\Omega) = \mathbb{N}$ donc on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) = 1$, d'où

$$\begin{aligned} P(N=0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) = 1 - P(N=1) - \sum_{n=2}^{+\infty} P(N=n) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) . \end{aligned}$$

Or pour tout entier $M \geq 2$, à l'aide d'un changement d'indice puis en reconnaissant une somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{M} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) &= \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{M+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{M+1} \\ &\underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{2}$.

Finalement, $\boxed{P(N=0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0}$.

6. N admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} nP(N = n)$ converge absolument, si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n\frac{1}{n(n+1)}$ converge absolument, or pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n+1} \geq 0$ et $\dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc par comparaison des séries à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n+1}$ diverge. Ainsi $\boxed{N \text{ n'admet pas d'espérance}}$.

Exercice 2

Partie A : Premier exemple

1. A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}}$.

   A est une matrice carrée d'ordre 3 admettant trois valeurs propres distinctes, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.
   Enfin 0 n'est pas valeur propre de A donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

2. On cherche les sous-espaces propres de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_{1/2}(A) &\iff \Big(A - \frac{1}{2} I_3\Big) X = 0 \iff \begin{cases} x/2 - y + z = 0, \\ 0 = 0, \\ 3z/2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2y, \\ z = 0. \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{E_{1/2}(A) = \mathrm{Vect}\Big[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big]}$.

$$X \in E_1(A) \iff \Big(A - I_3\Big)X = 0 \iff \begin{cases} -y+z=0\,, \\ -y/2=0\,, \\ z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=0\,, \\ z=0\,. \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi $\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\Big[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big]}$.

$$X \in E_2(A) \iff \Big(A - 2I_3\Big)X = 0 \iff \begin{cases} -x-y+z=0\,, \\ -3y/2=0\,, \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=x\,, \\ y=0\,. \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi $\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\Big[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big]}$.

Finalement on a $A = PDP^{-1}$ avec $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

La matrice D est diagonale de coefficients diagonaux tous non-nuls, elle est donc inversible et son inverse est la matrice diagonale constituée des inverses des coefficients diagonaux de D : $\boxed{D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$.

3. Le calcul donne $\boxed{Q^2 = I_3}$ et $\boxed{QDQ = D^{-1}}$.
4. Remarquons d'abord que d'après la question précédente, $Q.Q = I_3$, c'est-à-dire que Q est inversible et $Q^{-1} = Q$. Par ailleurs $A = PDP^{-1}$ donc $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, or $D^{-1} = QDQ$ d'après la question précédente, donc
$$A^{-1} = PQDQP^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1}\,.$$
Enfin $D = P^{-1}AP$ donc
$$A^{-1} = PQ(P^{-1}AP)Q^{-1}P^{-1} = PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1}\,.$$
Ainsi si l'on note $R = PQP^{-1}$, on a $A^{-1} = RAR^{-1}$, c'est-à-dire que $\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables}}$.

Partie B : Deuxième exemple

5. Ona $f(1,0,0) = (1,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,0,1)$ et $f(0,0,1) = (0,-1,2)$ donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$.

M est inversible si et seulement si $(L_2 \leftrightarrow L_3)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, ce qui est le cas puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire de coefficients diagonaux tous non-nuls. Ainsi $\boxed{M \text{ est inversible}}$.

6. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout le système linéaire $(M - I_3)X = 0$:

$$(M - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 0=0\,, \\ -y-z=0\,, \\ y+z=0\,. \end{cases} \iff z=-y \iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Ce système possède au moins une solution non-nulle donc 1 est valeur propre de M. De plus $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$.

Finalement puisque M représente f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\boxed{\text{1 est valeur propre de } f}$ et $\boxed{E_1(f) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)}$. Les vecteurs u_1 et u_2 étant non-colinéaires, ils forment bien une base de $E_1(f)$.

(b) On cherche u_3 sous la forme $u_3 = (x, y, z)$.

$$f(u_3) - u_3 = u_2 \iff (M - I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0\,, \\ -y - z = 1\,, \\ y + z = -1\,. \end{cases}$$
$$\iff z = -y - 1\,.$$

Ainsi on peut par exemple choisir $x = 0$, $y = 0$, $z = -1$ et $\boxed{u_3 = (0, 0, -1) \text{ convient}}$.

(c) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au_1 + bu_2 + cu_3 = (0, 0, 0)$. Alors

$$\begin{cases} a + 0.b + 0.c = 0\,, \\ 0.a + b + 0.c = 0\,, \\ 0.a - b - c = 0\,, \end{cases}$$

d'où $a = b = c = 0$. Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. De plus elle est constituée de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, $\boxed{\text{c'est donc une base de } \mathbb{R}^3}$.

7. (a) On a montré précédemment que (u_1, u_2) est une base de $E_1(f)$, donc $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$. Enfin on a choisi u_3 tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$, c'est-à-dire $f(u_3) = u_2 + u_3$. Ainsi la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est $\boxed{M_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$.

Déterminons maintenant M_2 : on a $f(u_1) = u_1$, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ par linéarité de f et $f(u_3) = -(-u_2) + u_3$, donc $\boxed{M_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$.

(b) M_1 et M_2 représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes, $\boxed{\text{elles sont donc semblables}}$ (en effet si on note T la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ alors $M_2 = T^{-1}M_1T$ d'après la formule de changement de base).

Le calcul donne $\boxed{M_1M_2 = I_3}$.

8. On vient de montrer que $M_1M_2 = I_3$, de plus M_1 est une matrice carrée, donc M_1 est inversible et $M_1^{-1} = M_2$. M et M_2 représentent le même endomorphisme f donc M et M_2 sont semblables. Par ailleurs M^{-1} et M_1^{-1} représentent le même endomorphisme f^{-1} donc M^{-1} et M_1^{-1} sont semblables. Autrement dit M^{-1} et M_2 sont semblables puisque $M_1^{-1} = M_2$.
Finalement on a montré que M et M^{-1} sont toutes deux semblables à la même matrice M_2. Ainsi par transitivité $\boxed{M \text{ et } M^{-1} \text{ sont semblables}}$.

Partie C : Troisième exemple

9. T est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non-nuls, donc $\boxed{T \text{ est inversible}}$.
Montrons par l'absurde que T n'est pas diagonalisable. Supposons T diagonalisable. T étant triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc 1 est l'unique valeur propre de T. Ainsi puisque T est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $T = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3$. Ainsi $T = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, ce qui contredit la définition de T.
Ainsi $\boxed{T \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

10. (a) Le calcul donne $\boxed{N^3 = 0_3}$. Ainsi,

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 + N^3 = \boxed{I_3}\,.$$

(b) On vient de montrer que $(I_3+N)(I_3-N+N^2)=I_3$, de plus I_3+N est une matrice carrée, donc $I_3+N=T$ est inversible et $\boxed{T^{-1}=I_3-N+N^2}$.

11. (a) On vérifie par le calcul que $N^2\neq 0_3$, donc g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe $u\in\mathbb{R}^3$ tel que $\boxed{g^2(u)\neq 0}$. En revanche $N^3=0_3$ donc g^3 est l'endomorphisme nul, en particulier $\boxed{g^3(u)=0}$.

    (b) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $ag^2(u)+bg(u)+cu=0$. Alors en appliquant g^2 et par linéarité de g^2 , on obtient $ag^4(u)+bg^3(u)+cg^2(u)=g^2(0)=0$, autrement dit puisque $g^3(u)=g^4(u)=0$: $cg^2(u)=0$. Or $g^2(u)\neq 0$ donc $c=0$.
    L'équation initiale se récrit donc : $ag^2(u)+bg(u)=0$. En appliquant g qui est linéaire, on obtient alors : $ag^3(u)+bg^2(u)=0$, c'est-à-dire $bg^2(u)=0$, or $g^2(u)\neq 0$, donc $b=0$.
    Finalement il reste $ag^2(u)=0$, d'où $a=0$. On a donc montré que $a=b=c=0$, et donc la famille $\mathcal{B}_3$ est libre. Il s'agit par ailleurs d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ainsi $\boxed{\mathcal{B}_3 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

    (c) On a $g\big(g^2(u)\big)=g^3(u)=0$, $g\big(g(u)\big)=g^2(u)$, et $g(u)=g(u)$ donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$ est : $\boxed{M_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}$.

    (d) Le calcul donne $\boxed{N^2-N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=M_3}$.
    Or M_3 et N sont semblables car elles représentent le même endomorphisme g dans des bases différentes. Ainsi $\boxed{N^2-N \text{ et } N \text{ sont semblables}}$.

12. D'après la question précédente il existe une matrice U inversible telle que $N=U^{-1}(N^2-N)U$. En remarquant que $I_3=U^{-1}U$, on peut alors écrire

$$T=I_3+N=U^{-1}U+U^{-1}(N^2-N)U=U^{-1}(I_3+N^2-N)U\,.$$

Or d'après la question 10b), $T^{-1}=I_3+N^2-N$, donc $T=U^{-1}T^{-1}U$, autrement dit $\boxed{T \text{ et } T^{-1} \text{ sont semblables}}$.

Exercice 3

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables et pour tout $t>0$,

$$f'(t)=1-\frac{1}{t^2}>0 \iff t^2>1 \iff t>1$$

car $t>0$.
Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0,1] \text{ et strictement croissante sur } [1,+\infty[}$.
On a $\boxed{\lim_{t\to 0^+} f(t)=+\infty}$, et $\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t)=+\infty}$.

2. D'après la question précédente, f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise donc une bijection}}$ de $[1,+\infty[$ sur $f\big([1,+\infty[\big)=\big[f(1),\lim_{t\to+\infty} f(t)\big[=[2,+\infty[$.

3. (a) g possède les mêmes variations que f , donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [2,+\infty[}$.

   (b) f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et sa dérivée ne s'annule par sur $[1,+\infty[$, donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur } [2,+\infty[}$.

   (c) Soient $y\in[2,+\infty[$ et $t\in]0,+\infty[$.

$$y=f(t) \iff y=t+\frac{1}{t} \iff ty=t^2+1 \iff t^2-ty+1=0\,.$$

   Le discriminant de l'équation polyomiale obtenue est $\Delta=y^2-4\geq 0$ car $y\geq 2$. Ainsi

$$y=f(t) \iff t=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \quad \text{ou} \quad t=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\,.$$

Les deux solutions obtenues sont bien strictement positives. $g(y)$ est égal à l'unique solution $t \geq 1$ de $y = f(t)$, or

$$\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2} \geq \frac{y}{2} \geq 1\,,$$

ainsi :

$$\boxed{g(y) = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}}\,.$$

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

4. On utilise la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}\partial_1 h(x,y) &= \Big(-\frac{1}{x^2}(1+x) + \Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big).1\Big)(1+y) \\ &= \Big(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)(1+y) \\ &= \boxed{\Big(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\Big)(1+y)}\,.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\partial_2 h(x,y) &= (1+x)\Big(-\frac{1}{y^2}(1+y) + \Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big).1\Big) \\ &= \boxed{(1+x)\Big(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\Big)}\,.\end{aligned}$$

5. Soit $(x,y) \in U$. (x,y) est un point critique de h si et seulement si

$$\begin{cases}\partial_1 h(x,y) = 0\,,\\ \partial_2 h(x,y) = 0\,,\end{cases} \iff \begin{cases}\Big(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\Big)(1+y) = 0\,,\\ (1+x)\Big(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\Big) = 0\,,\end{cases} \underset{(1+x\neq 0\,,\ 1+y\neq 0)}{\iff} \begin{cases}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y} = 0\,,\\ -\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x} = 0\,,\end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} y = x^2\,,\\ x = y^2\,.\end{cases}}$$

6. On a

$$\begin{cases} y = x^2\,,\\ x = y^2\,.\end{cases} \iff \begin{cases} y = y^4\,,\\ x = y^2\,.\end{cases} \underset{y\neq 0}{\iff} \begin{cases} y = 1\,,\\ x = 1\,.\end{cases}$$

Ainsi $\boxed{h \text{ admet pour unique point critique le point } (1,1)}$.

7. (a) Pour tout $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big)(1+x+y+xy) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1 + x \\ &= 2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &= \boxed{2 + f(x) + f(y) + f\Big(\frac{x}{y}\Big)}\,.\end{aligned}$$

   (b) On a $h(1,1) = 2\times 2\times 2 = 8$, donc d'après l'identité de la question précédente, pour tout $(x,y) \in U$,

$$h(x,y) - h(1,1) = f(x) + f(y) + f\Big(\frac{x}{y}\Big) - 6\,.$$

   Or on a montré dans la Partie A que f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$, ainsi f admet un minimum global en 1, c'est-à-dire que pour tout $t > 0$, $f(t) \geq f(1) = 2$. Ainsi,

$$h(x,y) - h(1,1) \geq 2+2+2-6 = 0\,.$$

   On a donc montré que pour tout $(x,y) \in U$, $h(x,y) \geq h(1,1)$.
   Autrement dit $\boxed{h \text{ admet un minimum global sur } U \text{ en } (1,1)}$.

Partie C : Étude d'une suite

8. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   - pour $n = 1$, u_1 est bien défini d'après l'énoncé et $u_1 = 1 \geq 1$.
   - supposons u_n bien défini et $u_n \geq 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

   On a $n \geq 1$ et $u_n \geq 1$ donc $nu_n \geq 1$ et f est bien défini sur $[1, +\infty[$, donc $f(nu_n)$ est bien défini, par conséquent $u_{n+1} = \frac{1}{n} f(nu_n)$ est bien défini.

   Par ailleurs $\frac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ donc
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geq u_n \geq 1$$
   par hypothèse de récurrence. La propriété est donc démontrée au rang $n + 1$.
   - Finalement on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n \text{ existe et } u_n \geq 1}$.

9.
```
function u = suite(n)
    u  = 1
    for k = 2:n
        u = u + 1/((k-1)^2*u)
    end
endfunction
```

10. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ car $u_n \geq 0$. Par ailleurs, $u_n \geq 1$ d'après la question 8), donc $v_n = \frac{1}{n^2 u_n} \leq \frac{1}{n^2}$.
    Finalement on a bien
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \boxed{0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}}.$$

    (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \geq 0$ et $v_n \leq \frac{1}{n^2}$, or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n \text{ converge}}$.

    (c) Soit $n \geq 2$ un entier.
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_n - u_1 = \boxed{u_n - 1}, \end{aligned}$$
    où l'on a effectué un changement d'indice et reconnu une somme télescopique.
    On a ainsi $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$, or la série $\sum_{n\geq 2} v_n$ converge donc la suite de ses sommes partielles converge, par conséquent $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ vers un réel ℓ.

11. (a) Soit $k \geq 2$ un entier. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1, k]$, donc pour tout $t \in [k-1, k]$, $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2}$. Ainsi par croissance de l'intégrale,
$$\boxed{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} dt = \frac{1}{k^2}}.$$

(b) Soient n et p des entiers tels que $2 \leq p < n$. A l'aide d'un changement d'indice et en reconnaissant une somme télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n-1} v_k &= \sum_{k=p}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{n-1} u_k = \sum_{k=p+1}^{n} u_k - \sum_{k=p}^{n-1} u_k \\ &= \boxed{u_n - u_p}\,.\end{aligned}$$

D'autre part en combinant les inégalités des questions 10a) et 11a), pour tout entier $k \geq 2$,

$$0 \leq v_k \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,dt\,.$$

En sommant ces encadrements pour $k \in [\![p, n-1]\!]$:

$$0 \leq \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,dt\,,$$

autrement dit

$$\boxed{0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt}\,,$$

où l'on a utilisé la relation de Chasles dans le membre de droite de l'encadrement.

(c) En particulier pour $p = 2$ et $n \geq 3$, l'encadrement précédent donne :

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1 \leq 1\,,$$

ainsi

$$\boxed{u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2}\,.$$

Par définition on a $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{1.u_1} = 2$, donc on a $u_n \in [2, 3]$, ceci pour tout $n \geq 3$. Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $\boxed{\ell \in [2, 3]}$.

(d) Soit $p \geq 2$ fixé et $n > p$ un entier. On reprend l'encadrement de la question 11b) :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt\,.$$

On a par ailleurs

$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_{p-1}^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{p-1}\,,$$

ainsi

$$0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1}\,.$$

Finalement en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}}\,.$$

(e) Si on choisit p tel que $\dfrac{1}{p-1} \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire $p \geq 10001$, alors d'après l'encadrement de la question précédente, $0 \leq \ell - u_p \leq 10^{-4}$ et u_p constitue une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.
Ainsi la fonction suivante convient :

```
function u = approx()
    u = suite(10001)
endfunction
```

Variante sans calculer explicitement le rang p à partir duquel u_p constitue une bonne approximation de ℓ :

```
function u = approx()
    u = 2
    p = 2
    while 1/(p-1) >= 0.0001
        u = u + 1/(p^2*u)
        p = p+1
    end
endfunction
```