Chapitre 11 : Graphes

Tables des matières

I. Graphes non orientés :

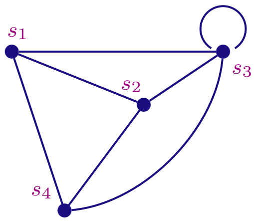
1) Définitions :

Définition. Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est déterminé par la donnée de deux ensembles :

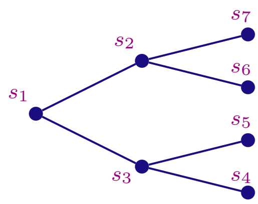
- ⋆ un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés *sommets*
- ⋆ un ensemble A de paires de sommets appelées *arêtes*.

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un graphe G, alors pour $i, j \in [[1; n]]$ les sommets s_i et s_j sont dits *adjacents* dans le graphe G lorsqu'il existe une arête a qui les relie et on dit qu'ils sont *incidents* avec l'arête a. Lorsque les deux extrémités sont confondues ($s_i = s_j$) l'arête s'appelle une *boucle*.

Exemple 1.



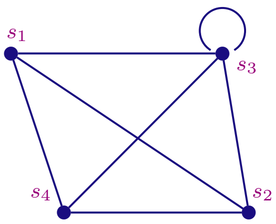
Graphe G_1



Graphe G_2

Citer pour chaque graphes deux sommets adjacents et une arête incidente.

Remarque . Un graphe peut avoir plusieurs représentations, par exemple le graphe G_1 peut être représenté comme suit :



Graphe G_1

Définition. On appelle **ordre** d'un graphe le **nombre de sommets** de ce graphe, on appelle **taille** du graphe, **le nombre d'arêtes** de ce graphe.

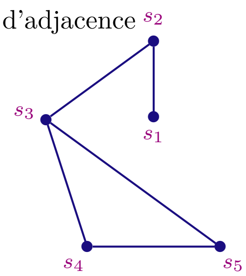
Exemple 2. Déterminer l'ordre des graphes G_1 et G_2.

Il existe un autre façon de représenter un graphe à l'aide de sa liste d'adjacence.

Définition. La **liste d'adjacence d'un graphe** dont les sommets sont numérotés à l'aide de nombres entiers, consiste à associer à chaque sommet s_i, $i \in \mathbb{N}$ la liste de tous les sommets s_j, $jj \in \mathbb{N}$ tels qu'il y ait une arête entre s_i et s_j.

Exemple 3. ⋆ Pour le graphe suivant on obtient la liste d'adjacence

s_1	s_2	\	\
s_2	s_1	s_3	\
s_3	s_2	s_4	s_5
s_4	s_3	s_5	\
s_5	s_3	s_4	\



Graphe G_3

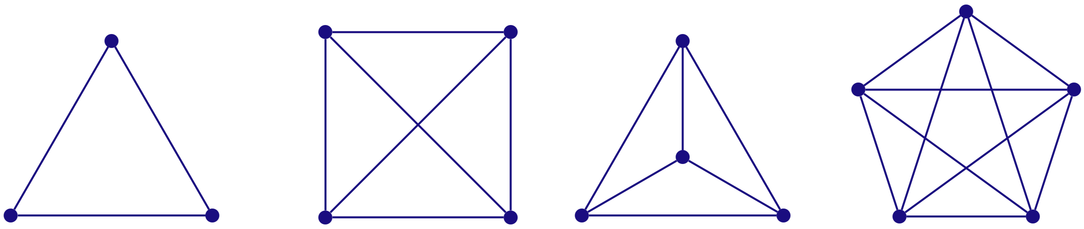
⋆ Déterminer la liste d'adjacence du graphe G_1

2) Graphe simple :

Définition. Un graphe $G = (S, A)$ est dit **simple** si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.

Remarque . Sur un graphe simple une arête a de l'ensemble A peut s'écrire $a = \{s_i, s_j\}$ où s_i et s_j sont les *extrémités* de a.

Définition. Le graphe **complet** K_n est le graphe simple d'ordre $n \geqslant 1$ dont tous les sommets sont deux à deux adjacents.



K_3 — Deux représentations du K_4 — K_5

Exemple 4.

Proposition 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ le graphe K_n contient $\binom{n}{2}$ arêtes.

Démonstration.

3) Degré dans un graphe :

Définition. On appelle **degré** d'un sommet, le **nombre d'arêtes incidentes** à ce sommet.

Remarque . Lorsqu'une boucle est sur un sommet, la boucle apporte un degré de 2 au sommet.

Exemple 5. Déterminer pour les graphes G_1 et G_2, un sommet ayant le degré le plus haut.

Théorème 2.Formule d'Euler

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On considère un graphe constitué de n sommets notés $s_1, s_2, ..., s_n$ et de p arêtes. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, si d_i désigne le degré du sommet s_i alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i = 2p$

Exemple 6. Vérifier la formule pour le graphe G_1.

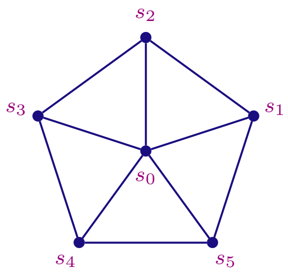
4) Chaîne et cycle :

Définition. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- ⋆ Une **chaîne** est une liste finie de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadrent dans la liste.
- ⋆ La **longueur** d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- ⋆ Une chaîne est dire *simple* lorsque toutes les arêtes sont deux à deux distinctes.
- ⋆ Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une chaîne *élémentaire*.
- ⋆ Une chaîne est *fermée* si l'origine et l'extrémité finale de la chaîne sont confondues.
- ⋆ Une chaîne simple et fermée est un **cycle**.
- ⋆ Un cycle est dit *élémentaire* lorsque tous ses sommets sont deux à deux distincts.

Exemple 7.

Dans le graphe G_4, ci-dessous, citer une chaîne de longueur 8, une chaîne élémentaire de longueur 4, un cycle.



Graphe G_4

Définition. Soit G un graphe ; si x et y sont deux sommets de G, la **distance** de x à y notée $d(x, y)$, est la longueur d'une plus **courte** chaîne de G reliant x à y.

Remarque . ⋆ La distance d'un sommet à lui même est nulle.

⋆ S'il n'existe pas de chaînes joignant deux sommets x et y, la distance de x à y est infinie.

Définition. On appelle **diamètre** d'un graphe la plus **grande** des distances entre deux sommets du graphe.

Exemple 8. Compléter le tableau suivant avec les distances entre les sommets du graphes G_1 puis en déterminer le diamètre :

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1				
s_2				
s_3				
s_4				

Définition. On considère un graphe G non orienté, constitué de n sommets notés $s_1, s_2, ..., s_n$ $(n \geqslant 2)$ et on note pour tout $i \in [[1, n]]$, d_i le degré du sommet s_i.

⋆ On appelle **degré de centralité** du sommet s_i le réel $\dfrac{d_i}{n-1}$.

⋆ Pour $k \in [[1, n]]$, si $n_{i,j}$ désigne le nombre de plus courtes chaînes entre les sommets s_i et s_j pour $(i, j) \in [[1, n]]^2$, et $n_{i,j}(s_k)$ le nombre de celles passant par s_k, on appelle **degré d'intermédiarité** du sommet s_k, le réel $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq k, j\neq k}} \frac{n_{i,j}(s_k)}{n_{i,j}}$

Exemple 9. Déterminer pour le graphe G_3, le sommet qui a le plus grand degré de centralité et le degré d'intermédiarité de s_2.

II. Graphe orienté :

1) Définitions :

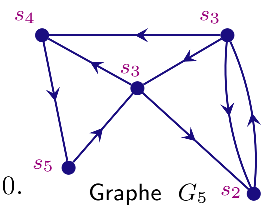
Définition. Un graphe orienté $G = (S, A)$ est déterminé par la donnée de deux ensembles :

⋆ un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés *sommets*

⋆ un ensemble A de couples de sommets appelées *arcs*.

Si $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ est l'ensemble des sommets du graphe orienté G, alors les sommets s_i et s_j sont dits *adjacents* dans le graphe G lorsqu'il existe un arc a qui les relie et on dit qu'ils sont *incidents* avec l'arc a. Lorsque les deux extrémités d'un arc sont confondues $(s_i = s_j)$ l'arc s'appelle une *boucle*.

Exemple 10.



Citer dans le graphe G_5 deux sommets adjacents reliés par deux arcs dont on donnera le nom.

Définition. Un graphe $G = (S, A)$ est dit *simple* si deux sommets distincts sont joints par au plus un arc et s'il est sans boucle. Ainsi un arc a de l'ensemble A peut s'écrire comme un couple ordonné $a = (s_i, s_j)$ où s_i et s_j sont les *extrémités* de a.

Comme pour les graphes non orientés, il existe un autre façon de représenter un graphe, à l'aide de sa liste d'adjacence.

Définition. La **liste d'adjacence d'un graphe** dont les sommets sont numérotés à l'aide de nombres entiers, consiste à associer à chaque sommet s_i, $i \in \mathbb{N}$ la liste de tous les sommets s_j, $j \in \mathbb{N}$ tels qu'il y ait un arc entre s_i et s_j.

Exemple 11. Déterminer la liste d'adjacence du graphe G_5

2) Degré dans un graphe orienté :

Définition. Soit s un sommet d'un graphe orienté G.

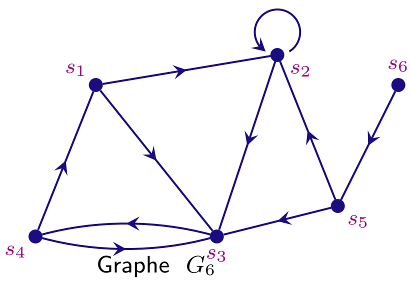
- ⋆ On note $d^+(s)$ le degré extérieur du sommet s, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité initiale.
- ⋆ On note $d^-(s)$ le degré intérieur du sommet s, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité finale.

Le degré du sommet s est :

$$d(s) = d^+(s) + d^-(s)$$

Exemple 12. À partir du graphe G_6 ci contre compléter avec les degrés des sommets sont :

$d^+(s_1) = 2$ et $d^-(s_1) = 1$ d'où $d(s_1) = ...$
$d^+(s_2) = 2$ et $d^-(s_2) = 3$ d'où $d(s_2) = ...$
$d^+(s_3) = 1$ et $d^-(s_3) = 4$ d'où $d(s_3) = ...$
$d^+(s_4) = 2$ et $d^-(s_4) = 1$ d'où $d(s_4) = ...$
$d^+(s_5) = 2$ et $d^-(s_5) = 1$ d'où $d(s_5) = ...$
$d^+(s_6) = 1$ et $d^-(s_6) = 0$ d'où $d(s_6) = ...$



La formule d'Euler est valable pour une graphe orienté mais elle peut s'énoncer comme suit

Théorème 3. Formule d'Euler

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On considère un graphe constitué de n sommets notés $A_1, A_2, ..., A_n$ et de p arcs. Pour tout $i \in [[1; n]]$, si d_i^+ désigne le degré extérieur du sommet A_i et d_i^- le degré inférieur alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i^+ = \sum_{i=1}^{n} d_i^- = p$
Dans un graphe orienté, la somme des degrés extérieurs et la somme des degrés intérieurs sont égales au nombre d'arcs.

3) Chemin et circuit :

Définition. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

- ⋆ Une **chemin** est une liste finie et alternée de sommets et d'arcs, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arc est incident avec les sommets qui l'encadrent dans la liste.
- ⋆ La **longueur** d'un chemin est égale au nombre d'arcs qui le composent.
- ⋆ Un chemin dont toutes les arcs sont distincts est un *chemin simple*.
- ⋆ Un chemin dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est un *chemin élémentaire*.
- ⋆ Une *chemin est fermée* si l'origine et l'extrémité finale du chemin sont confondues.
- ⋆ Un chemin fermé est un **circuit** si il est composée d'arcs tous distincts.

Exemple 13.
Dans le graphe G_5, citer une chemin de longueur 6, un chemin élémentaire de longueur 3, un circuit.

Définition. Soit G un graphe orienté ; si x et y sont deux sommets de G, la distance de x à y notée $d(x, y)$, est la longueur d'un plus court chemin de G reliant x à y.

Remarque . ⋆ La distance d'un sommet à lui même est nulle.
⋆ S'il n'existe pas de chemins joignant deux sommets x et y, la distance de x à y est infinie.

Définition. On appelle diamètre d'un graphe la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

Exemple 14. Compléter le tableau suivant avec les distances entre les sommets du graphes G_5 puis en déterminer le diamètre :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1					
s_2					
s_3					
s_4					
s_5					

Définition. On considère un graphe G orienté, constitué de n sommets notés $s_1, s_2, ..., s_n$ $(n \geqslant 2)$ et on note pour tout $i \in [[1, n]]$, d_i^+ le degré extérieur du sommet s_i, et d_i^- son degré intérieur.

- ⋆ On appelle degré de centralité extérieur du sommet s_i le réel $\dfrac{d_i^+}{n-1}$ et son degré de centralité intérieur le réel $\dfrac{d_i^-}{n-1}$.
- ⋆ Pour $k \in [[1, n]]$, si $n_{i,j}$ désigne le nombre de plus courts chemins entre les sommets s_i et s_j et $n_{i,j}(s_k)$ ceux passant par s_k, pour $(i, j) \in [[1, n]]^2$, on appelle degré d'intermédiarité du sommet s_k, le réel $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq k, j\neq k}} \frac{n_{i,j}(s_k)}{n_{i,j}}$

Exemple 15. Déterminer pour le graphe G_5, le sommet qui a le plus grand degré de centralité et le degré d'intermédiarité de s_2.

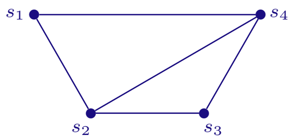
III. Connexité

La notion de connexité est valable pour un graphe orienté ou non.

1) Graphes non orientés

Définition. Un graphe G non orienté est connexe s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets

Exemple 16. Préciser si le graphe non orienté suivant est connexe :



Graphe G_7

Définition. Soit G un graphe non orienté.

- ⋆ Une chaîne eulérienne dans le graphe G est une chaîne simple qui contient toutes les arêtes de G c'est à dire qui passe exactement une fois par chaque arête de G.
- ⋆ Un cycle eulérien dans le graphe G est une chaîne eulérienne fermée.

Un graphe non orienté contenant un cycle eulérien est dit graphe eulérien.

Exemple 17. Déterminer si possible pour le graphe G_7 une chaîne eulérienne et un cycle eulérien.

Théorème 4.

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe. Il admet un cycle eulérien si et seulement si $d(s)$ est pair pour tout $s \in S$.
Si seulement deux sommets ne vérifient pas les conditions précédentes alors G admet une chaîne eulérienne.

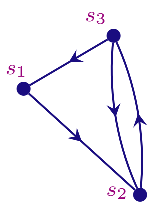
Exemple 18. Appliquer le théorème 4 avec le graphe G_7.

2) Graphes orientés

Définition. Un graphe G est fortement connexe si pour tout couple de sommets s_i et s_j x et y, il existe un chemin de s_i à s_j ou $s_i = s_j$.

Un graphe orienté est fortement connexe s'il existe un chemin du sommet a au sommet b et du sommet b au sommet a, quels que soient les sommets représentés par a et b dans le graphe.

Exemple 19. Préciser si le graphe orienté suivant est fortement connexe :



Graphe G_8

Définition. Soit G un graphe orienté.

- ⋆ Un chemin eulérien dans le graphe G est un chemin simple qui contient tous les arcs de G c'est à dire qui passe exactement une fois par chaque arête de G.
- ⋆ Un circuit eulérien dans le graphe G est un chemin eulérien fermé.

Un graphe contenant un circuit eulérien est dit graphe eulérien.

Exemple 20. Déterminer si possible pour le graphe G_8 un chemin eulérien ou un circuit eulérien.

Théorème 5.

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté fortement connexe.

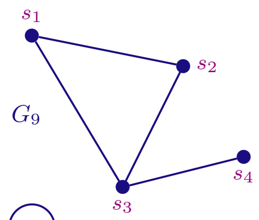
- $\star$ G admet un circuit eulérien si et seulement si $d_+(s) = d_-(s)$ pour tout $s \in S$
- $\star$ G admet un chemin eulérien si seulement deux sommets vérifient $|d_+(s) - d_-(s)| = 1$.

Exemple 21. Appliquer le théorème 5 avec le graphe G_8.

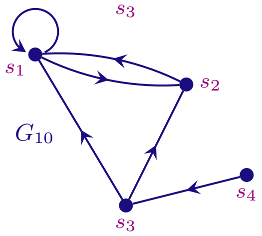
IV. Représentation matricielle d'un graphe

Définition. Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n, $n \in \mathbb{N}$, dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice carrée $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[[1;n]]^2}$ de dimension $n \times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets s_i et s_j.
Dans le cas d'un graphe orienté, m_{ij} est égal au nombre d'arcs ayant pour origine le sommet s_i et pour extrémité finale le sommet s_j.

Exemple 22. Déterminer les matrices d'adjacences des graphes suivants :

1. 

La matrice d'adjacence du graphe simple G_9 est $M(G_9) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

2. 

La matrice d'adjacence du graphe orienté G_{10} est $M(G_{10}) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

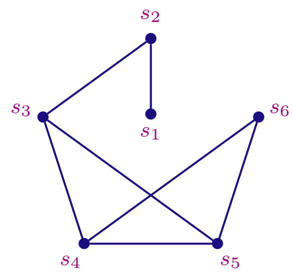
Remarque . $\star$ La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

- $\star$ La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple ne comporte que des 0.
- $\star$ La somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est égale au double du nombre d'arêtes de ce graphe.
- $\star$ La somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté est égale au nombre d'arcs de ce graphe.

Théorème 6.

- $\star$ Soit G un graphe non orienté numéroté de 1 à n, ${}_n \in \mathbb{N}^*$ et M sa matrice d'adjacence. Le nombre de chaînes de longueur p, $p \in [[1, n]]$ joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice M^p.
- $\star$ Soit G un graphe orienté numéroté de 1 à n, $n \in \mathbb{N}^*$ et M sa matrice d'adjacence. Le nombre de chemins de longueur $p \in [[1; 2]]$ joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice M^p.

Exemple 23. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe G_{11} ci-dessous



Graphe G_{11}

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Déterminer le nombre de chaînes reliant les sommets s_1 et s_3 de longueur 3.

Théorème 7.

- ⋆ Si G est un graphe non orienté , comprenant n sommets ($n \in \mathbb{N}^*$), ayant pour matrice d'adjacence $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le graphe G est connexe si, et seulement si les coefficients de la matrice $I_n + M + ...M^{n-1}$ sont strictement positifs.
- ⋆ Si G est un graphe orienté , comprenant n sommets ($n \in \mathbb{N}^*$), ayant pour matrice d'adjacence $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  Le graphe G est fortement connexe si, et seulement si les coefficients de la matrice $I_n + M + ...M^{n-1}$ sont strictement positifs.

Exemple 24. Vérifier avec le théorème 7, si le graphe de l'exemple précédent est connexe.

Théorème 8.

Si G est un graphe non orienté , comprenant n sommets ($n \in \mathbb{N}^*$), ayant pour matrice d'adjacence $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ⋆ La distance entre deux sommets i et j est le plus petit $p \in \mathbb{N}$ tel que le coefficient d'indice (i, j) de M^p soit non nul.
- ⋆ Le diamètre de G est le plus petit $p \in \mathbb{N}$ tel que tous les coefficients de $I_n + M + \cdots + M^p$ soient non nul.

Exemple 25. ⋆ À l'aide de la matrice d'adjacence de G_9, déterminer la distance entre s_1 et s_4.

- ⋆ Déterminer le diamètre de G_9.