Chapitre 14 : Lois discrètes usuelles

Tables des matières

I. Introduction **2**

II. Lois usuelles discrètes finies **2**

1) Loi certaine 2
2) Lois uniformes finies 2
3) Loi de Bernoulli 3
4) Loi binomiale 3

III. Lois usuelles discrètes infinies **4**

1) Loi géométrique 4
2) Loi de Poisson 5

I. Introduction

Les chapitres 8 et 12 ont permis de définir les variables aléatoires discrètes, que l'univers soit fini ou bien infini et dénombrable, ainsi que les notions de loi, d'espérance, de variance et leurs principales propriétés. Les calculs de sommes (cas fini) ou de séries (cas infini dénombrable) sont omniprésents, ce qui demande beaucoup de technicité.

Cependant, de nombreuses variables aléatoires rencontrées dans les modèles mathématiques (et donc dans les exercices) suivent un petit nombre de lois, nommées en conséquence lois usuelles.

Dans ce chapitre, on étudie ces lois. Les résultats pourront ensuite être réutilisés sans démonstration dans les exercices.

Pour chaque loi usuelle, il faudra connaître par cœur la notation (et ses paramètres éventuels), la loi de probabilité (et en particulier $X(\Omega)$ et savoir si cet espace est fini ou infini dénombrable), l'espérance, la variance, le ou les cas typiques d'utilisation et la rédaction classique pour justifier son utilisation.

En revanche, pour toutes les autres lois, les résultats exposés dans ce chapitre sont inutiles.

Notation. On utilisera le symbole $\hookrightarrow$ pour signifier qu'une variable aléatoire « suit »une loi usuelle.

II. Lois usuelles discrètes finies

1) Loi certaine

Définition. Une variable aléatoire X suit la loi certaine si elle ne prend qu'une seule valeur, c'est à dire si sa loi est donnée par $X(\Omega)=\{a\}$ et $P(X=a)=1$, avec $a\in\mathbb{R}$. Il n'y pas de notation usuelle pour cette loi.

Proposition 1.

« paramètres et caractérisation d'une loi certaine »

1. Soit a un nombre réel. Si X suit une loi certaine avec $X(\Omega)=\{a\}$, alors $E(X)=a$ et $V(X)=0$.
2. Si X vérifie, $V(X)=0$, alors X suit une loi certaine.

Méthode.

Utilisation classique et rédaction pour utiliser la loi certaine On utilise très peu cette loi, qui est en fait déterministe. Pour justifier son utilisation, on peut dire « X ne prend qu'une valeur donc suit une loi certaine »ou encore « $V(X)=0$ donc X suit une loi certaine ».

2) Lois uniformes finies

Définition. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$ si $X(\Omega)=[\![1\,;n]\!]$ et si, pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, on a $P(X=k)=\dfrac{1}{n}$. On note alors $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$

Proposition 2.« PARAMÈTRES D'UNE LOI UNIFORME FINIE »

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$. On a $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$ et $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$.

Démonstration. ✎ Utiliser la linéarité de la somme, une somme de référence et, pour la variance, le résultat suivant, démontré au chapitre 2 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Méthode.

Utilisation classique et rédaction pour utiliser la loi uniforme On retrouve cette loi dans les cas suivants : X est le résultat d'un lancer de dé équilibré à n faces, d'un tirage de boules indiscernables et numérotées, d'un lancer d'une pièce équilibrée,$\cdots$

Pour justifier son utilisation, on peut dire : « comme les valeurs de X sont les entiers entre 1 et n, et toutes ces valeurs sont équiprobables, alors $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$. »

En fait, une loi est dite uniforme dès qu'il y a équiprobabilité des différentes valeurs prises par X, mais rien n'impose que ces valeurs soient des entiers consécutifs, ni que la première valeur soit 1. La méthode suivante expose une technique possible pour déterminer les paramètres de telles lois. Une autre solution est de tout refaire à la main en revenant aux définitions.

Méthode.

Lois uniformes qui ne sont pas sur $[\![1\,;n]\!]$ Si X suit une loi uniforme, on peut, dans certains cas, se ramener à une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$, où Y est déduite de X par soustraction et/ou division.

Exemple 1. ✎

1. Soit $(a,\ b) \in \mathbb{Z}$ tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a\,;b]\!]$ et on note $X \hookrightarrow U([\![a\,;b]\!])$ si $X(\Omega) = [\![a\,;b]\!]$ et si, pour tout $k \in [\![a\,;b]\!]$, on a $P(X=k) = \dfrac{1}{b-a+1}$.
   (a) Vérifier que l'on définit ainsi une loi de probabilité.
   (b) Posons $Y = X - a + 1$. Quelle est la loi de Y ?
   (c) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
2. Un jeu propose les gains algébriques suivants, en euros, qui sont tous équiprobables : -20, -15, -10, -5, 0 , 5, 10 et 15. On note X la variable aléatoire associée au gain.
   (a) Par quelles opérations peut-on déduire de X une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$, où n est une entier à préciser ?
   (b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
3. On lance un dé équilibré à faces numérotées de 2 à 12 et on note D le résultat. Donner l'espérance et la variance de D. Comparer avec le résultat de la somme S de deux dés à 6 faces. On admettra que $S = X_1 + X_2$, où X_1 et X_2 sont indépendantes (ceci implique $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$) et suivent toutes deux des lois uniformes sur $[\![1\,;6]\!]$.

3) Loi de Bernoulli

Définition. Soit $p \in [0\,;1]$. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Proposition 3. « PARAMÈTRES D'UNE LOI DE BERNOULLI »

Soit $p \in [0\,;1]$ et $X \hookrightarrow B(p)$. Alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Démonstration. ✎ à la main et facile, les sommes ne comportent que deux termes...

Méthode. Utilisation classique et rédaction pour utiliser la loi de Bernoulli

Un exemple d'utilisation est le suivant : on lance une pièce truquée pour laquelle le côté Face est obtenu avec la probabilité p. Soit X qui vaut 1 lorsqu'on obtient Face, et 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow B(p)$. Pour justifier son utilisation, on peut dire « on appelle succès l'événement ... de probabilité p . X , la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec, suit une loi de Bernoulli de paramètre p ».

Exemple 2. ✎

1. A quelle condition une loi de Bernoulli peut-elle être uniforme ? certaine ?
2. On lance un dé. Alice gagne 1 euro lorsqu'elle fait un résultat supérieur ou égal à 5, et rien sinon. On note G son gain.
   Étudier la variable aléatoire G.
3. On s'intéresse au taux d'échecs d'un gymnaste lors de sa dernière figure. On suppose que la variable aléatoire qui vaut 1 lorsqu'il rate cette figure et 0 sinon suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$. Expérimentalement, on a estimé : $V(X) \approx \dfrac{1}{4}$. Avec quelle probabilité le gymnaste rate-t-il sa dernière figure ?

4) Loi binomiale

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0\,;1]$. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si
$X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$et si, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\ p)$.

Démonstration. ✎ Il y a deux philosophies : soit on admet la formule du binôme de Newton et on vérifie que l'on définit ainsi une probabilité, soit on justifie l'expression de la probabilité et on en déduit ainsi la formule du binôme de Newton.

Proposition 4.« PROPRIÉTÉ ET PARAMÈTRES D'UNE LOI BINOMIALE »

Soient $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0\,;1]$ et $X \hookrightarrow B(n,p)$. Alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
(admis) Soient $n \in \mathbb{N},\ p \in [0\,;1]$ et $X_1,\ \cdots,\ X_n$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors si $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, on a $X \hookrightarrow B(n,p)$.

Démonstration. ✎ Première méthode : considérer la fonction $f : x \mapsto (px + (1-p))^n$ et la dériver deux fois. En déduire deux expressions distinctes pour $f'(1)$ ainsi que pour $f''(1)$. Recoller touts les morceaux pour obtenir $E(X)$ et $V(X)$.

Deuxième méthode : admettre le second point de la propriété et utiliser la linéarité de l'espérance et l'additivité de la variance pour des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Méthode. Utilisation classique et rédaction pour utiliser la loi binomiale

Toute répétition d'expérience aléatoires à deux issues de manière indépendantes, ce qui s'appelle un schéma de Bernoulli, conduit à l'introduction de loi binomiale Pour justifier son utilisation, on peut dire « dans une expérience à deux issues, on appelle succès l'événement ... de probabilité p. On répète n fois cette expérience de manière indépendante. Alors si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, $X \hookrightarrow B(n,p)$. », ou encore (moins conseillé) « On a un schéma de Bernoulli donc $X \hookrightarrow B(n,p)$, où X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès », ou encore « $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\ p)$ car c'est la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p ».

Exemple 3. ✎

On lance un dé. Alice gagne un euro lorsqu'elle fait un résultat supérieur ou égal à 5, et rien sinon. Alice lance 5 fois le dé. On note G son gain. Étudier G.

Un conseil d'administration valide sa décision lorsque 10 au moins des 12 membres son d'accord. Chacun des membres prend sa décision indépendamment des autres et choisit d'accepter avec la probabilité $\dfrac{3}{4}$. Déterminer le nombre moyen de membres

qui acceptent, puis la probabilité que la décision soit validée.

On modélise le nombre annuel d'accidents d'un conducteur par une loi binomiale de paramètres n et p où p est la probabilité d'avoir un accident à chaque utilisation et n le nombre de fois où il utilise sa voiture. Le modèle vous semble-t-il pertinent ? Le nombre moyen d'accidents des conducteurs a été mesuré à 2, 6 et la variance à 1, 96. Déterminer les paramètres de la loi.

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne, et les moteurs sont indépendants les uns des autres. Chaque avion arrive à sa destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. En fonction de la valeur de p , quel avion est-il le plus judicieux de choisir ?

III. Lois usuelles discrètes infinies

1) Loi géométrique

Définition.

Soit $p \in [0\,;1]$. Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}^*, onaP(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On note alors $X \hookrightarrow G(p)$.

Proposition 5.

Soit $p \in [0\,;1]$ et $X \hookrightarrow G(p)$. On a alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Démonstration. ✎ Pour vérifier qu'on a bien une probabilité, calculer l'espérance et la variance, il faut utiliser, dans l'ordre, les trois résultats sur les séries géométriques.

Méthode.

Les variables aléatoires qui décrivent un temps d'attente avant le premier succès, lorsqu'on répète une expérience à l'identique et de manière indépendante , suivent une loi géométrique. Pour justifier son utilisation, on peut rédiger ainsi : « On appelle succès l'événement .... X est la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier succès en répétant indépendamment l'expérience de Bernoulli associée ».

Exemple 4. ✎

1. Bob jette un dé jusqu'à obtenir un résultat supérieur ou égal à 5. On note N le nombre de lancers nécessaires. Étudier N . Quelle est la probabilité que Bob ait besoin de moins de 10 lancers pour réussir ? En moyenne, combien de lancer doit-il effectuer pour réussir ?
2. On modélise le nombre de secondes nécessaires à la désintégration d'une particule radioactive par une loi géométrique de paramètre p . Montrer que $P(X > t_1) = (1-p)^{t_1}$, puis montrer que $P_{X>t_1}(X > t_1 + d) = P(X > d)$. Interpréter.
3. On jette cinq dés équilibrés. Après le premier lancer, on reprend et on relance les dés qui n'ont pas donné d'as, jusqu'à ce qu'on obtienne cinq as. Soit X le nombre de lancers nécessaires.
   Calculer $P(X \leqslant k)$ puis $P(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Combien de lancers seront nécessaires en moyenne ?

2) Loi de Poisson

Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 6.« Paramètres d'une loi exponentielle »

Soit $p \in [0\,;1]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On a alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Démonstration. ✎ Se servir des séries exponentielles et de simplification sur les factorielles.

Méthode.

La loi de Poisson a parfois été appelée loi des événements rares, pour ses applications classiques à la modélisation de phénomènes rares. Pas de cas typique ni de justification : cette loi sera toujours introduite par l'énoncé.

Exemple 5. ✎

1. Soit $p = 0.1\%$ la proportion des patients qui font une réaction allergique à la prise d'un médicament. On donne ce médicament à un grand nombre ($n = 1000$) de patients.
   (a) Quelle loi le nombre N de patients faisant une réaction allergique suit-elle ? Donner une expression de la probabilité que N soit inférieur ou égal à 3.
   (b) Afin de simplifier les calculs, on cherche à approcher N par une variable aléatoire N' suivant une loi de Poisson. Comment choisir le paramètre ? Calculer alors $P(N \leqslant 3)$. Commenter.
2. Chaque jour un vendeur d'un journal local a X acheteurs. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 8. Le bénéfice de chaque vente est de un euro.
   (a) Quelle est la recette moyenne ?
   (b) En fait le marchand n'a en stock que 10 exemplaires du journal. Exprimer $P(X > 10)$ puis la nouvelle recette moyenne.