

CHAPITRE 2 : SOMMES ET PRODUITS

Tables des matières

I	Sommes de nombres réels	2
1	Somme simple	2
2	Somme double	4
II	Produit	5
1	Produit de nombres réels	5
2	Factorielle et coefficients binomiaux	6

I. Sommes de nombres réels

1. Somme simple

Notation. Si $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq n$, on note $\llbracket m; n \rrbracket$ l'ensemble des nombres entiers compris entre m et n .

Exemple 1. $\llbracket 2; 4 \rrbracket = \{2; 3; 4\}$.

Notation. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et $a_p, \dots, a_n$ sont des nombres réels. La somme $a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$ se note $\sum_{k=p}^n a_k$, $\sum_{p \leq k \leq n} a_k$ ou encore $\sum_{k \in \llbracket p; n \rrbracket} a_k$.

Remarque . La lettre « k » est l'*indice* de la somme. Elle est dite muette, car on peut la remplacer par n'importe quelle lettre (non utilisée auparavant).

Exemple 2. 

$$1. \text{ Écrire avec des pointillés les sommes : } A = \sum_{k=2}^{50} k^2, \quad B = \sum_{p \in \llbracket 1; 9 \rrbracket} e^{\sqrt{p}}, \quad C = \sum_{1 \leq j \leq 100} \frac{\ln j}{j+1}.$$

2. Écrire avec le symbole Σ :

$$D = \ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(42), \quad E = 2 + 4 + 6 + \dots + 50, \quad F = \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+3} + \dots + \frac{3\,000}{3\,000+3\,001}$$

Remarque . Si p et n sont deux nombres entiers naturel tels que $p \leq n$

1. la somme $\sum_{k=p}^n a_k$ contient $n - p + 1$ termes.

$$2. \sum_{k=p}^p a_k = a_p$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{k=p}^n a = (n - p + 1)a$.

Exemple 3.  Donner le nombre de termes de chacune des sommes A, B, C, D, E et F .

On peut montrer par récurrence les propriétés suivantes :

Proposition 1.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, et $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ des nombres. Alors :

$$1. \text{ associativité : } \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k, \text{ en particulier } \sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k.$$

$$2. \text{ linéarité : } \lambda \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \lambda a_k \text{ et } \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k).$$

$$3. \text{ inégalité triangulaire : } \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$$

Proposition 2. SOMMES USUELLES

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. Sommes des premières puissances des n premiers entiers naturels non nuls :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$(a) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(c) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

2. Somme géométrique (avec $q \in \mathbb{R}^*$) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Démonstration. 1a, 1b et 1c : récurrence, 2 : calculer $(1-q) \sum_{k=0}^n q^k$. □

Changement d'indice

Lorsque l'indice de sommation est entier, il est fréquent de réécrire une somme en opérant sur cet indice. La manipulation est valable tant que les termes sur lesquels portent la somme sont inchangés.

Exemple 4. $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1}$. Les deux sommes sont identiques car correspondent toutes les deux à la somme étendue

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Ceci correspond à un changement d'indice : $j = k + 1$.

Exercice 1. Ecrire $\sum_{k=0}^n a_k$ avec un changement d'indice $j = k + 3$.

Remarque . Avec un peu d'aisance, on peut même directement écrire

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$$

. On peut aussi écrire

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_{n-k}$$

qui se comprend comme une sommation à rebours.

⚠ Lors de changement d'indice, il faut faire attention à rester dans un cadre où les indices manipulés restent entiers. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k \neq \sum_{p=1}^n a_{2p}$$

.

car la première somme comporte le double de terme de la seconde !

Sommes télescopiques

Exercice 2. En effectuant un changement d'indice, démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et $a_p, \dots, a_{n+1}$ sont des nombres réels. On a :

$$\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$$

Exemple 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. En déduire la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

2. Somme double

Définition. Si l'ensemble d'indexation décrivant une somme apparaît comme étant constitué de couples, on dit que cette somme est une somme double.

Exemple 6.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 3 \leq j \leq 4}} a_{i,j} = a_{1,3} + a_{1,4} + a_{2,3} + a_{2,4}$$

qui peut s'écrire aussi

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 3 \leq j \leq 4}} a_{i,j} = a_{1,3} + a_{2,3} + a_{1,4} + a_{2,4}.$$

La première égalité de cet exemple s'écrit

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 3 \leq j \leq 4}} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq 2} \left(\sum_{3 \leq j \leq 4} a_{i,j} \right).$$

et la seconde

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 3 \leq j \leq 4}} a_{i,j} = \sum_{3 \leq j \leq 4} \left(\sum_{1 \leq i \leq 2} a_{i,j} \right).$$

Pus généralement on a :

Proposition 4.

Soient deux entiers m et n tels que $m \geq n$. On a :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_{i,j} \right) = \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{1 \leq i \leq m} a_{i,j} \right).$$

Notation. Si $m = n$, la somme $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}$ est souvent notée $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}$.

Exemple 7. On a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} ij \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} i \left(\sum_{1 \leq j \leq n} j \right) \text{ (on factorise par } i) \\ &= \left(\sum_{1 \leq i \leq n} i \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} j \right) \text{ (on factorise par } \sum_{1 \leq j \leq n} j) \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Plus généralement

Proposition 5.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels. On a :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j = \left(\sum_{1 \leq i \leq m} a_i \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} b_j \right)$$

Exemple 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. Montrer que

$$\left(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

II. Produit

1. Produit de nombres réels

Notation. Soient les nombres $a_0, \dots, a_n$.

Le produit $a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n$ se note $\prod_{k=0}^n a_k$, $\prod_{0 \leq k \leq n} a_k$ ou encore $\prod_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} a_k$.

Proposition 6.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels.

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \prod_{k=1}^n a = a^n.$
2. $\forall m \in \llbracket 1; n \rrbracket, \prod_{k=1}^n a_k = \left(\prod_{k=1}^m a_k \right) \left(\prod_{k=m+1}^n a_k \right).$
3. $\prod_{k=1}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{k=1}^n b_k \right).$
4. Si aucun des b_k n'est nul, on a $\prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^n b_k}.$

Exemple 9. Calculer le produit $\prod_{i=0}^n \frac{i+1}{i+2}$

2. Factorielle et coefficients binomiaux

Définition. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre *factorielle* n par la formule :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n.$$

Par convention, on pose aussi $0! = 1$.

Exemple 10. Calculer $n!$ pour $n \in \llbracket 0; 6 \rrbracket$. Simplifier $\frac{(n+2)!}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition. Pour tous entiers naturels n et p , on définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$, qui représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n , par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } n \geq p \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

On utilise parfois la notation $C_n^p = \binom{n}{p}$.

Exemple 11. soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{n}$. Soit $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, montrer que $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

Proposition 7. TRIANGLE DE PASCAL

Soient deux entiers naturels $p < n$. Alors : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$

Démonstration. Partir du membre de droite et réduire au même dénominateur. □

Exemple 12. Montrer par récurrence qu'il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir p objets parmi n .

Exemple 13.  Coefficients binomiaux pour $0 \leq p \leq n \leq 6$:

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4							
5							
6							

on utilise la proposition 7 : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Proposition 8. BINÔME DE NEWTON

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$.

Démonstration.  Procéder par récurrence sur n . □

Exemple 14. Soit x réel, développer : $(1 + x)^4$. Calculer, pour tout entier naturel n , $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$.