Chapitre 2 : Sommes doubles, produits, coefficients binomiaux

Tables des matières

I. Sommes doubles

1) Somme double à indices indépendants

Définition. Si l'ensemble d'indexation décrivant une somme apparaît comme étant constitué de couples, on dit que cette somme est une somme double.

Exemple 1.

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\3\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,\ j} = a_{1,\ 3}+a_{1,\ 4}+a_{2,\ 3}+a_{2,\ 4}$$

qui peut s'écrire aussi

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\3\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,\ j} = a_{1,\ 3}+a_{2,\ 3}+a_{1,\ 4}+a_{2,\ 4}.$$

La première égalité de cet exemple s'écrit

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\3\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,\ j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant 2}\left(\sum_{3\leqslant j\leqslant 4} a_{i,\ j}\right).$$

et la seconde

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\3\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,\ j} = \sum_{3\leqslant j\leqslant 4}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant 2} a_{i,\ j}\right).$$

Pus généralement on a :

Proposition 1.

Soient deux entiers m et n tels que $m \geqslant n$. On a :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,\ j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant m}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,\ j}\right) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant m} a_{i,\ j}\right).$$

Notation. Si $m = n$, la somme $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,\ j}$ est souvent notée $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,\ j\leqslant n} a_{i,\ j}$.

Exemple 2. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} ij\right)\\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} i\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} j\right) (\text{ on factorise par } i)\\
&= \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} i\right)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} j\right) (\text{ on factorise par } \sum_{1\leqslant j\leqslant n} j)\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Plus généralement

Proposition 2.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, a_n$ des nombres réels. On a :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant m} a_i\right)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} b_j\right)$$

2) Somme double à indices dépendants

Exemple 3. ✎ La somme $x_{1,2}+x_{1,3}+x_{1,4}+x_{2,3}+x_{2,4}+x_{3,4}$ se note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_{i,j}$.

La somme $x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3}+x_{1,4}+x_{2,2}+x_{2,3}+x_{2,4}+x_{3,3}+x_{3,4}+x_{4,4}$ se note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4} x_{i,j}$.

Proposition 3. INTERVERSION DE SOMMES À INDICES DÉPENDANTS

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$$

Proposition 4.

Quels que soient les n réels, $x_1, \ldots, x_n$, avec n élément de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

II. Produit , factorielle, coefficients binomiaux

1) Produit de nombres réels

Notation. Soient les nombres $a_0, ..., a_n$.

Le produit $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$ se note $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k$, $\displaystyle\prod_{0\leqslant k\leqslant n} a_k$ ou encore $\displaystyle\prod_{k\in[\![1;n]\!]} a_k$.

Proposition 5.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n, b_1 \cdots, b_n$ des nombres réels.

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a = a^n$.
2. $\forall m \in [\![1\,;n]\!], \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right)$.
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$.
4. Si aucun des b_k n'est nul, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} b_k}$.

Exemple 4. ✎ Calculer le produit $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} \frac{i+1}{i+2}$

2) Factorielle

Définition. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre *factorielle* n par la formule :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Par convention, on pose aussi $0! = 1$.

Exemple 5. ✎ Calculer $n!$ pour $n \in [\![0\,;6]\!]$. Simplifier $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Coefficients binomiaux

Définition. Pour tous entiers naturels n et p, on définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$, qui représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n, par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } n \geqslant p \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

On utilise parfois la notation $C_n^p = \dbinom{n}{p}$.

Exemple 6. ✎ soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{n}$. Soit $p \in [\![0\,;n]\!]$, montrer que $\dbinom{n}{n-p} = \dbinom{n}{p}$.

Proposition 6. Triangle de Pascal

Soient deux entiers naturels $p < n$. Alors : $\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1}$.

Démonstration. ✎ Partir du membre de droite et réduire au même dénominateur. □

Exemple 7. ✎ Montrer par récurrence qu'il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir p objets parmi n.

Exemple 8. ✎ Coefficients binomiaux pour $0 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$:

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	**2**	**1**				
3	1	3	**3**	1			
4							
5							
6							

on utilise la proposition 6 : $\begin{array}{ccc} \binom{n}{p} & + & \binom{n}{p+1} \\ & & \| \\ & & \binom{n+1}{p+1} \end{array}$

Proposition 7. Binôme de Newton

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$.

Démonstration. ✎ Procéder par récurrence sur n. □

Exemple 9. Soit x réel, développer : $(1+x)^4$. Calculer, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.