Chapitre 5 : Fonctions usuelles

Tables des matières

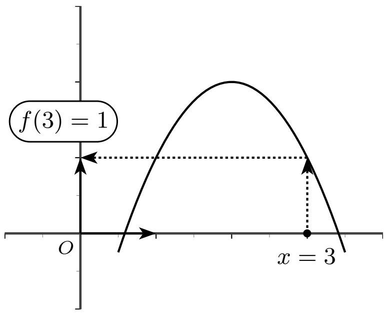
I. Propriétés des courbes

1) Définition et lecture graphique

Définition. L'**ensemble de définition** d'une fonction f, souvent noté $\mathcal{D}_f$ est, sauf mention du contraire, l'ensemble des valeurs réelles x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ est valide. La **courbe représentative** d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points du plan défini par $\mathcal{C}_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2,\ y = f(x)\}$.
L'équation $y = f(x)$ est une **équation cartésienne** de $\mathcal{C}_f$.

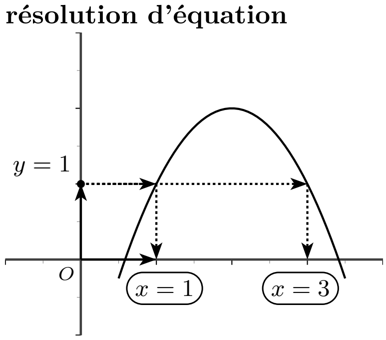
Exemple 1. Lecture graphique d'image et d'antécédents.

Lecture d'image



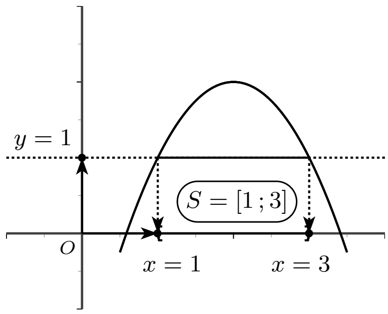
l'image de 3 par f ou $f(3)$ est 1.

Lecture d'antécédent ou résolution d'équation



les antécédents de 1 par f ou solutions de $f(x) = 1$ sont 1 et 3.

Résolution d'inéquation



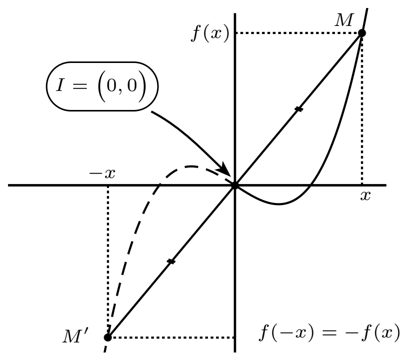
l'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 1$ est $[1, 3]$

2) Parité et symétrie

L'étude des propriétés d'une fonction permet de restreindre son ensemble d'étude et de compléter sa courbe par symétrie :

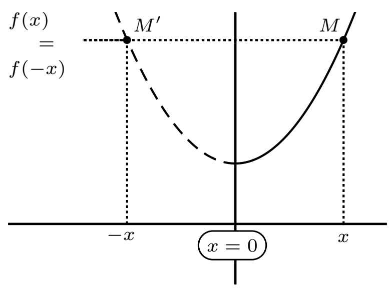
Définition. $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est **impaire** si et seulement si :
$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.
La courbe d'une fonction impaire est donc **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Exemple 2. ✎ ♡ Vérifier que $i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire



Définition. $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est **paire** si et seulement si :
$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
La courbe d'une fonction paire est donc **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** (d'équation $x = 0$).

Exemple 3. ✎ ♡ Vérifier que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 1$ est paire



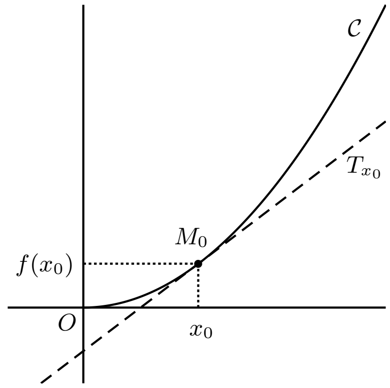
3) Tangentes

La dérivation fera l'objet d'un chapitre ultérieur. Intuitivement, la tangente en un point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ est la droite qui épouse au mieux l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de M. Elle permet de guider le tracé de $\mathcal{C}_f$ près de M.

Définition. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. La **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est la droite T_{x_0} d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

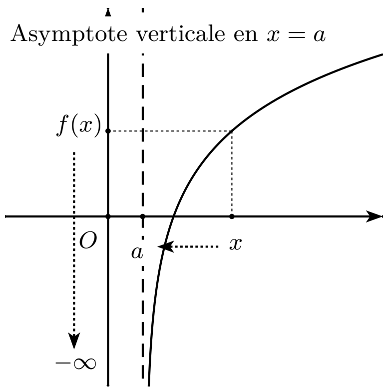
Ainsi, le **coefficient directeur** de cette tangente est nombre $f'(x_0)$.

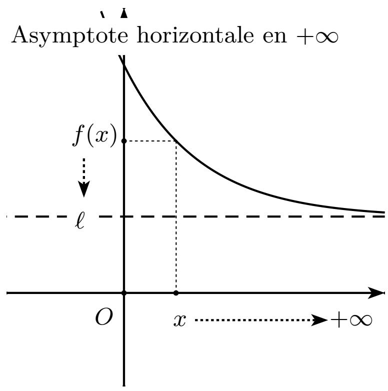


Exemple 4. ✎ Équation de la tangente à $\mathcal{P} : y = x^2$ au point $A(1, 1)$? Équation de la tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ au point d'abscisse 1 ?

4) Asymptotes et notion graphique de limite

Intuitivement, une **asymptote** à la courbe de f au voisinage d'une borne ouverte de son ensemble de définition, est une droite qui épouse au mieux l'allure de la courbe dans cette direction. Elle permet d'en guider le tracé.





Remarque . La notion de limite, qui sera vu dans un chapitre ultérieur peut être bien envisagée à l'aide de la représentation graphique et de la notion d'asymptote.

Par exemple, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ signifie que le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche de 3 que l'on veut, à condition de choisir x suffisamment grand. Cela traduit bien une proximité entre la courbe de f et la droite horizontale d'équation $y = 3$ « loin à droite » sur le graphique. Autrement dit, cette droite est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Par exemple, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ signifie que le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, à condition de choisir x suffisamment proche du nombre réel 1. Cela traduit bien une proximité entre la courbe de f et la droite verticale d'équation $x = 1$ « loin en haut » sur le graphique. Autrement dit, cette droite est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

Définition. La courbe d'une fonction f admet

- ⋆ une **asymptote verticale** d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
- ⋆ une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ $(\in \mathbb{R})$.
- ⋆ une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$ en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ $(\in \mathbb{R})$.

II. Variations d'une fonction et lien avec la dérivation

1) Variations

Définition. Soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$ Alors f est :

- ⋆ **constante sur** I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
- ⋆ **croissante sur** I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

> ⋆ **strictement croissante sur** I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
> ⋆ **décroissante sur** I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
> ⋆ **strictement décroissante sur** I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
>
> Si f vérifie une des propriétés précédentes, on dit que f est **monotone sur** I.

Méthode. Enchaînements d'inégalités

Partant d'une inégalité de départ valable sur un certain intervalle, on peut appliquer une fonction dont on connait les variations sur cet intervalle afin de déduire une nouvelle inégalité.
Sauf cas évident, il faudra toujours **justifier ces étapes** en précisant (si besoin en démontrant) les variations de la fonction sur l'intervalle en question.
En résumé : « **appliquer une fonction croissante ne change pas le sens de l'inégalité, appliquer une fonction décroissante change le sens de l'inégalité.** ». Les cas à connaître parfaitement :

1. **ne change pas** le sens de l'inégalité : ajouter (ou soustraire) le même nombre, multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif, prendre le carré de deux nombres positifs, prendre la racine carrée de deux nombres positifs, appliquer la fonction exponentielle, appliquer la fonction logarithme à deux nombres positifs.
2. **change** le sens de l'inégalité : multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif, prendre le carré de deux nombres négatifs, prendre l'inverse de deux nombres non nuls de même signe.

Exemple 5. ✎ ♡ Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(6-3x)^2}$. Encadrer $f(x)$ lorsque $x \in [0;1]$.

Remarque . La plupart du temps, on utilise toutefois l'outil de la dérivation, plus calculatoire, pour établir les variations d'une fonction, ce qui évite d'inventer de fausses régles et permet surtout de traiter des cas beaucoup plus compliqués.

2) Dérivées usuelles

La plupart des formules qui vont nous servir ont été vues au lycée et travaillées au chapitre 0.

La notion de fonctions composées, vue au chapitre 1, amène une nouvelle formule dont vous connaissez déjà un ou deux cas particuliers depuis le lycée.

Proposition 1.

Si $u : I \to J$ dérivable et v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour $x \in I$, $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$
En particulier : 1. $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ 2. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ 3. $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$ 4. $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

Exemple 6. ✎ Dériver les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \left(x^2+7x+3\right)^{43}$ 2. $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ 3. $x \mapsto x\ln(5x^2+3x+1)$.

3) Application de la dérivée aux variations

Théorème 2.

Soit f une fonction définie et continue sur un **intervalle** I. Si
⋆ $f'(x)$ est nulle sur l'intervalle I, alors f est constante sur I.
⋆ $f'(x) > 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement croissante sur I.
⋆ $f'(x) < 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque . Les deux derniers points restent vrais si $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs de x, comme par exemple la fonction cube.

⚠Il est nécessaire de considérer **un intervalle** pour appliquer le théorème précédent, sinon il peut être faux, comme par exemple pour la fonction inverse sur son ensemble de définition.

III. Fonctions rationnelles

1) Fonctions polynomiales

Définition. Les fonctions **constantes** sont de la forme $x \mapsto c$ où $c \in \mathbb{R}$ fixé.

Les fonctions **monômes** sont de la forme : $x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions **polynomiales** sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Le plus grand exposant n est le **degré** du polynôme.

2) Rappels sur les fonctions affines

Voir le chapitre 0 pour le signe d'une fonction affine.

Méthode. **Obtenir l'équation réduite d'une droite contenant deux points A et B de coordonnées connues**

On calcule le coefficient directeur via la formule précédente. L'ordonnée à l'origine b s'obtient en remplaçant a, x_A, y_A dans $y_A = ax_A + b$ et en résolvant (on peut aussi apprendre $b = y_A - ax_A$).

Exemple 7. ✎ ♡ Soient $A\,(2;5)\,, B\,(1;3)$ et $C\,(25;29)$.

1. Donner une équation de (AB). 2. Donner une équation de la parallèle à (AB) contenant C.

3) Rappels et compléments sur les polynômes de degré 2

Voir le chapitre 0 pour les formules de factorisation, les tableaux de signes et de variations.

Exemple 8. ✎

1. Résoudre $-x^2 + 4x - 5 < 0$ sur $\mathbb{R}$
2. Résoudre $x^4 - x^2 - 2 = 0$ (**resp.** $\leqslant 0$) sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}$
   (a) Calculer $f(3)$. (b) Etudier les variations de f. (c) Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$.

Méthode. **Méthode du changement de variable pour se ramener à une équation du second degré**

On pose $X = x^2$, $X = \mathrm{e}^x$ ou $X = \ln(x)$ lorsque cela permet de se ramener à un (in)équation du second degré en X.

Méthode. **Montrer une inégalité ou étudier un signe *via* une étude de fonction**

Lorsque les manipulations algébriques (voir la méthode 1) sur les inégalités ne suffisent plus, une méthode très importante pour étudier un signe ou établir une inégalité est la suivante :

1. Dans le cas d'une inégalité du type $A(x) \geqslant B(x)$ à établir, se ramener par soustraction à $f(x) = A(x) - B(x) \geqslant 0$, c'est à dire à l'étude d'un signe.
2. Etablir les variations de la fonction f (par dérivation par exemple).
3. Placer dans le tableau de variations toutes les valeurs pour lesquelles $f(x) = 0$, soit :
   - ⋆ parce qu'elle sont connues d'après les calculs précédents.
   - ⋆ parce qu'elles sont très faciles à trouver.
   - ⋆ en utilisant le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).

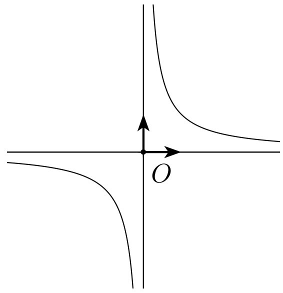
4) Fonction inverse

Définition. La fonction **inverse** est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
On appelle **fonction rationnelle** toute fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômes. Le quotient de deux fonctions affines est une **fonction homographique**. Elle est représentée par une **hyperbole** (sauf cas particuliers).

Proposition 3.

Définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Impaire et représentée par une hyperbole.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$
$\frac{1}{x}$	$-$	‖	$+$



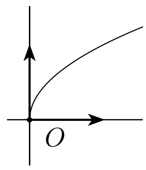
Exemple 9. ✎ ♡ Donner les ensembles de définition de $f : x \mapsto \dfrac{1}{-x^2+3x-2}$ et de $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$ et étudier les variations de ces deux fonctions

Méthode. **Domaine de résolution d'une (in)équation, de définition d'une fonction**
Même si ce n'est pas explicitement demandé dans l'énoncé, il faut TOUJOURS commencer par donner le domaine de résolution de l'(in)équation (resp. définition d'une fonction f), c'est à dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels toutes les expressions sont valides (resp. $f(x)$ a un sens). La résolution effectuée, il faut conserver uniquement les solutions qui appartiennent à cet ensemble. Cette méthode est particulièrement importante en présence de **quotients, de racines carrées et de logarithmes**.

IV. Racine carrée

Proposition 4.

La fonction racine carrée est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa courbe admet une **tangente verticale** à l'origine et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.



Exemple 10. ✎ 1. Résoudre $\sqrt{x+2} = x$ (**resp.** $\leqslant$) sur $\mathbb{R}$. 2. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

V. Valeur absolue

Définition. Pour tout réel, x, on pose $|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$. C'est la distance du point d'abscisse x à l'origine.

Remarque . Comme $|x| = \sqrt{x^2}$, les propriétés de la valeur absolue sont similaires à celles de la racine carrée.

Exemple 11 (**Etude de la fonction valeur absolue**). ♡ Soit f la fonction **valeur absolue** définie par $f(x) = |x|$
1. Donner $\mathcal{D}_f$. 2. Tracer $\mathcal{C}_f$. 3. Donner, si possible, la valeur de $f'(x)$ en fonction de x.

Méthode. Résoudre des (in)équations avec valeurs absolues

Sauf cas particuliers, la résolution se fait par **disjonction des cas**. On dresse le tableau de signe de la quantité dans la valeur absolue (plus il y a de valeurs absolues, plus le tableau est complexe), puis, sur chacun des intervalles ou les signes sont constants, la résolution se fait de manière classique.
Il y a tout de même **quelques cas particuliers** à retenir.

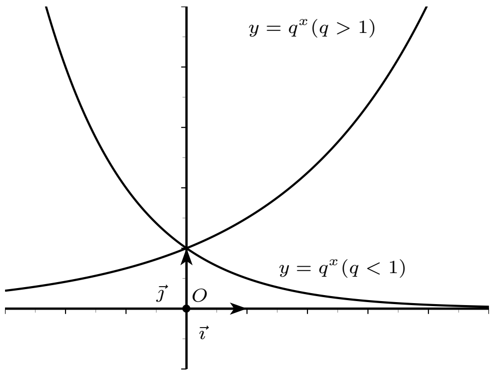
1. Si $a<0$, $|f(x)|=a$ et $f(x)\leqslant a$ n'ont pas de solution et $f(x)>a$ est vraie sur $\mathcal{D}_f$.
2. $|f(x)|=0$ et $|f(x)|\leqslant 0$ sont équivalentes à $f(x)=0$ et $|f(x)|>0$ est équivalente à $f(x)\neq 0$.
3. Si $a>0$, $\begin{cases} |f(x)|=a \Leftrightarrow f(x)=a \text{ ou } f(x)=-a \\ |f(x)|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant f(x)\leqslant a \\ |f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)>a \text{ ou } f(x)<-a \end{cases}$
4. $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ ou $f(x)=-g(x)$,

Exemple 12. ✎ Résoudre sur $\mathbb{R}$:
1. $|2x-1|=|5x+1|$ 2. $|2x-1|=3$ 3. $|2x-1|<3$ 4. $|2x-1|>-2$ 5. $\left|x^2-2\right|\leqslant 3$ 6. $|2x-1|\leqslant|5x+1|$.

VI. Fonctions exponentielles

Théorème 5.

Soit $q>0$. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=q^x$ vérifie
1. f est strictement croissante si $q>1$, strictement décroissante si $q<1$, et constante si $q=1$.
2. $q>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} q^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=0$.
3. $q<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} q^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=+\infty$.



Exemple 13. ✎

1. Soient x et y deux réels, écrire $\dfrac{\sqrt{q^{6x}}\times q^{-7y}}{(q^{x+y})^3}$ sous la forme d'une seule exponentielle.
2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.
   $\bullet \mathrm{e}^{x+3}=0$ $\bullet \mathrm{e}^{x+3}=1$ $\bullet \mathrm{e}^{x}+3=1$ $\bullet \left(\mathrm{e}^{x+3}\right)^2-\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{x+2}=0$ $\bullet \mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2=0$.
3. Étudier f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ et g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-3x^2}$.

Proposition 6.

$T_0 : y=x+1$.
$\mathcal{C}_{exp}$ est au dessus de T_0 sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$$

Démonstration. ✎ étudier le signe de la différence.

Remarque . On note également $\exp(x)$ à la place de e^x même si la seconde notation est plus pratique pour mémoriser les propriétés algébriques des exponentielles, qui sont celles des puissances.

VII. Logarithmes et retour sur les exponentielles et les puissances

1) logarithme néperien

Définition. Le logarithme népérien la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base e. Ainsi pour tout réel y de $]0;+\infty[$, on définit $\ln y$ comme l'**unique antécédent** de y par la fonction exponentielle.

Proposition 7.

1. Pour tout réel y **strictement positif** , on a $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$
2. Pour tout réel x, on a $\ln(\mathrm{e}^x) = x$
3. $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$
4. Propriétés algébriques : pour tous réels $x, y > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

(a) $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)$

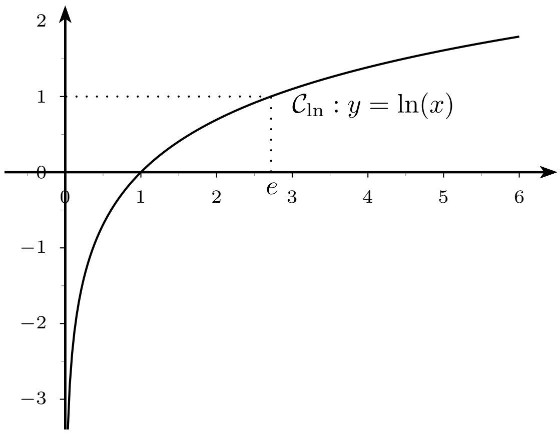
(b) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ donc $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$

(c) $\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$

(d) $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$

Proposition 8.

La fonction logarithme est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.



Exemple 14. ✎

1. Écrire avec un seul logarithme $A = \ln\left(\frac{1}{6}\right) + \ln(3) - \ln 5$ puis $B = \ln\left(x^2 - 1\right) - 2\ln(x-1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: • $\mathrm{e}^{3x} = 0.2$ • $e^{2x+1} - 3 > 0$ • $\ln(x-8) = 1$ • $\ln(2-x^2) < 0$ • $\ln(2-x) + \ln(2+x) < 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0{,}99^n < 0{,}5$.
4. Quel taux mensuel t donne une augmentation annuelle de 60% ?
5. Étudier les fonctions $f : x :\mapsto x\ln(x)$, $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)$ et $h : x \mapsto \ln(1-x^2)$.

Méthode. Équations, inéquations d'inconnues en exposant.

Lorsque l'inconnue est en exposant : en appliquant le logarithme aux deux membres de l'égalité ou de l'inégalité, sous réserve de positivité, on fait « descendre » l'inconnue.

2) Fonctions puissances réelles

Définition. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction **puissance** α est la f fonction **définie** sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$. On note $f(x) = x^\alpha$ car cette notation est compatible avec la notation puissance sur des monômes.

Exemple 15. ✎ 1. Vérifier que la formule de la dérivée est la même que pour les entiers.

2. (a) Écrire à l'aide d'une puissance de 2 : $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ (b) Écrire à l'aide de $\sqrt{x}$: $x^{\frac{1}{2}}$; $x^{\frac{3}{2}}$; $x^{-\frac{1}{2}}$

Remarque . On peut vérifier que pour $x > 0$, on a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. L'avantage de cette dernière notation est qu'elle permet de constater que la formule de la dérivée de la fonction racine est la même que celle des monômes.

Méthode.

Lorsque la variable est en exposant, il est souvent indispensable de revenir à la notation exponentielle afin d'étudier correctement la quantité.

Exemple 16. ✎ Etudier les fonctions $f : x \mapsto x^x$ et $g : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.