Chapitre 6 : Logique, ensembles et applications

Sommaire

I Éléments de logique

1 Quantificateurs

Notation. ⋆ Le signe "$\forall$" placé devant une variable x signifie "quel que soit x".
- ⋆ Le signe "$\exists$" placé devant une variable x signifie "il existe x ".
- ⋆ Le signe "$\exists!$" placé devant une variable x signifie "il existe un, et un seul, x".

Exemples.
1. La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$ se lit "quel que soit x appartenant à $\mathbb{R}$, x^2+1 est strictement positif.
2. La proposition $\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2=4$ se lit il existe x appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $x^2=4$.
3. La proposition $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2-2x+1=0$ se lit il existe un,et un seul, x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $x^2-2x+1=0$.

2 Proposition-Assertion

Définition. On appelle proposition ou assertion toute phrase $\mathcal{P}$significative susceptible d'être vraie ou fausse.

Remarque . Lorsqu'une proposition $\mathcal{P}$ dépend des valeurs prises par un paramètre x (resp. par plusieurs paramètres $x,\ y,\ \cdots$) on note souvent celle-ci $\mathcal{P}(x)$ (resp. $\mathcal{P}(x,\ y,\ \cdots)$ pour le souligner.

Exemples.
1. La proroposition $\mathcal{P}\ : \sqrt{2}>1$ est une proposition vraie.
2. La proroposition $\mathcal{P}\ : \exists x \in \mathbb{R},\ x^2+1 \leqslant 0$ est fausse.

Exercice 1. *Pour quelles valeurs réelles de x les propositions suivantes sont-elles vraies ?*
1. $\sqrt{x^2}=x$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
3. $\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$.

3 Négation

Définition. On appelle négation de $\mathcal{P}$, l'assertion notée $non(\mathcal{P})$ définie comme étant vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et inversement.

Propriété.
1. La négation de $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ est $\exists x,\ non(\mathcal{P}(x))$.
2. La négation de $\exists x,\ \mathcal{P}(x)$ est $\forall x,\ non(\mathcal{P}(x))$.

Exemple 1. La négation de $\mathcal{P}:\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \leqslant M$ est $non(\mathcal{P}):\ \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}, x^2+1>M$.

Exercice 2. *La proposition $\mathcal{P}$ ci-dessus est-elle vraie ?*

II Raisonnements

1 Le contre-exemple

Méthode. *Contre-exemple*

Pour montrer qu'une assertion est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.

Exemple 2. ✎ Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est *paire* si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=f(-x)$.

Montrer que $f: x \mapsto x+1$ n'est pas paire.

2 Prouver une implication directement

Méthode. *Prouver une implication directement*

L'implication « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ » se traduit par « $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ » ou « si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie aussi ». On dit que « $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$ ». Pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie. Pour que $\mathcal{P}$ soit vraie, il faut que $\mathcal{Q}$ soit vraie.
Une manière de démontrer l'implication est de commencer par l'hypothèse « supposons que $\mathcal{P}$ est vraie », et au terme d'un raisonnement déductif, obtenir « alors $\mathcal{Q}$ est vraie ».

Remarque . ⚠ Si $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ on n'a pas forcément $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$. L'implication $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ est appelée l'*implication réciproque* de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

Exemple 3. ✎ Prouver que si une fonction $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ est décroissante, alors elle est majorée. Que dire de la réciproque ?

3 Prouver une implication avec sa contraposée

Méthode. *Prouver une implication avec sa contraposée*

L'implication *contraposée* de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est non($\mathcal{Q}$) $\implies$ non($\mathcal{P}$).
Pour prouver une implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, on peut supposer que $\mathcal{Q}$ est fausse et en déduire $\mathcal{P}$ est fausse.

Exemple 4. ✎ prouver par contraposition, « $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ impair $\implies n$ impair ».

4 Utiliser une implication

Méthode. *Utiliser une implication*

⚠ $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ ne signifie pas que $\mathcal{Q}$ est vraie ! (ni $\mathcal{P}$, d'ailleurs). Il s'agit d'une relation de causalité, précisément, si $\mathcal{P}$ est vraie alors $\mathcal{Q}$ est vraie.
Pour utiliser une implication (qui peut-être donnée dans un énoncé, ou un résultat du cours), on procède de la manière suivante :

1. « $\mathcal{P}$ est vraie » (on ne peut l'affirmer qu'après l'avoir prouvé)
2. « or $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie » (résultat du cours ou démontré avant)
3. « donc $\mathcal{Q}$ est vraie »

Exemple 5. ✎ Prouver que $h : [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est majorée.

5 Raisonnement par double implication

Définition. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ est équivalente à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire. *Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si et seulement si $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{Q}$, ou encore que pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie.*

Méthode. *Prouver une équivalence par double implication*

Pour prouver une équivalence, on peut prouver séparément les deux implications.

Exemple 6. ✎ Prouver que « $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ impair $\iff n$ impair ».

6 Raisonnement par disjonction des cas

Méthode. *Disjonction des cas*

Pour prouver une assertion, on peut travailler sur une famille exhaustive de cas.

Exemple 7. ✎ Prouver que pour tout entier naturel n, $n(n+1)$ est pair.

7 Raisonnement par l'absurde

Méthode. *Raisonnement par l'absurde*

Pour prouver $\mathcal{P}$, il suffit de prouver que « non($\mathcal{P}$) $\implies$ $\mathcal{Q}$ » où $\mathcal{Q}$ est une assertion fausse (On aboutit à une contradiction).

Exemple 8. Montrons par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
On suppose que $\sqrt{2}$ est le quotient de deux entiers p et q sans facteurs communs : $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. On a alors $p = q\sqrt{2}$, donc, en élevant au carré : $p^2 = 2q^2$. Ainsi, p est pair donc $p = 2r$ pour un certain entier r. D'où $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$ donc $q^2 = 2r^2$: q est aussi pair, d'où p et q ont 2 comme facteur commun, ce qui est contradictoire. On a prouvé par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

III Ensembles

1 Ensembles de base

Les théories mathématiques contiennent nécessairement des concepts que l'on ne peut définir, et sur lesquels se fondent les définitions *et* propositions *de la théorie. On peut notamment citer les* ensembles *(qui sont intuitivement une collection d'objets ou d'*éléments*) et la relation d'appartenance à un ensemble que l'on note $\in$. La notation $x \in E$ signifie que x est un élément de l'ensemble E, ou encore que x appartient à E.*

Notation. Pour décrire un ensemble, on peut :
- ⋆ donner la liste de ses éléments, entre accolades : $E = \{0; \mathrm{e}; -3\}$
- ⋆ le définir comme la partie d'un ensemble dotée d'une propriété : $S = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2\}$

Notation. On peut notamment construire :
1. l'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, qui ne contient aucun élément.
2. l'ensemble des nombres entiers naturels, noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
3. l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$
4. les intervalles de nombres entiers $[\![3\,;7]\!] = \{3; 4; 5; 6; 7\}$
5. l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (quotients de nombres relatifs)
6. l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et les irrationnels comme $\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}, \ldots$
7. les intervalles : $]3\,;7] = \{x \in \mathbb{R},\ 3 < x \leqslant 7\}$, $[3\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ 3 \leqslant x\}, \ldots$

⚠ *on ne confondra pas* $\{0; 1\}$ *(qui ne contient que* 0 *et* 1*) et l'intervalle* $[0\,;1]$ *(qui contient tous les réels compris entre* 0 *et* 1*).*

Notation. Si $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles ci-dessus, on note $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
De même, on note $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty\,;0]$, $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[\ldots$

Définition.
1. Un ensemble E qui possède un nombre fini d'éléments est appelé un ensemble *fini*. Le nombre d'élements de E est appelé le cardinal de E et noté $\mathrm{card}(E)$ ou $|E|$.
2. Si à chaque élément d'un ensemble E, on peut faire correspondre un unique entier et réciproquement, on dit que E est un ensemble *dénombrable* (un tel ensemble a donc un nombre infini d'éléments).
3. Les ensembles qui ne sont pas dans les deux premières catégories sont des ensembles *non dénombrables*.

Exemple 9. $\mathbb{N}$ (par définition), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, en revanche, $\mathbb{R}$ ou même $[0; 1]$ sont non dénombrables.

Définition. Étant donnés deux ensembles A et B, le produit cartésien $A \times B$ de A est de B est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in A$ et $y \in B$.

On peut définir de même des produits cartésiens contenant davantage de facteurs.

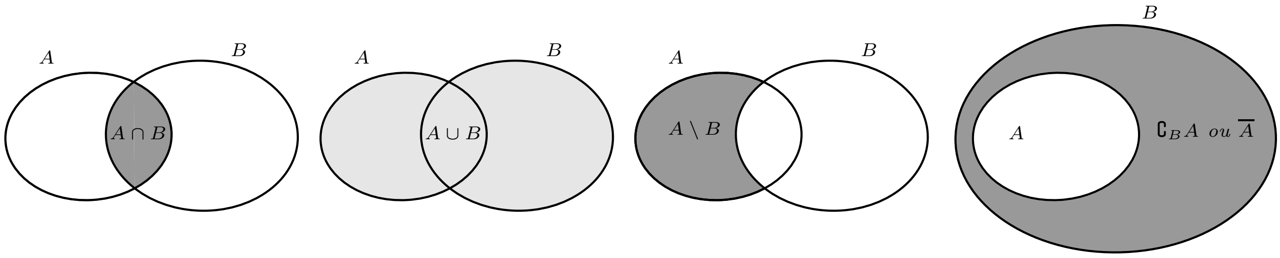
Si $B = A$ on note $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$, ...

Exemple 10. ✎ A quoi peuvent être associés les éléments de $\mathbb{R}^2$?

2 Opérations sur les ensembles

Définition. Soient A et B deux ensembles.

1. Lorsque $x \in A \implies x \in B$, on dit que A est *inclus* dans B, ce que l'on note $A \subset B$.
2. L'intersection de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$.
3. La réunion de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$.
4. L'ensemble A privé de B est défini par $x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B)$ (noté encore $A - B$).
5. Si $A \subset B$, le complémentaire de A dans B est $\complement_B A = B \setminus A$. On le notera $\overline{A}$ en probabilité lorsque B correspond à l'univers sur lequel on travaille.



Remarque . On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 11. ✎ Étant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'*ensemble des parties* de E : l'ensemble des ensembles inclus dans E. Décrire $\mathcal{P}([\![1\,;3]\!])$.

Exemple 12. Soit A et B deux sous ensembles de Ω.
Comparer les ensembles suivants $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap A$, $\overline{A} \cup A$, $\emptyset$, Ω.

Remarque . Les règles sur les ensembles établies dans l'exemple précédent restent valables pour des réunions (*resp.* intersections) finies ou dénombrables de sous ensembles de Ω.

Définition (Réunion et intersection finie ou dénombrable d'une famille d'ensembles). Soit E un ensemble et I un ensemble fini ou dénombrable. On considère une famille de sous ensembles de E, notée $(A_i)_{i \in I}$. Alors :

1. On note $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$ la réunion des A_i, pour $i \in I$, définie comme l'ensemble des éléments x de E tels qu'il existe au moins un entier $i \in I$ tel que $x \in A_i$.
2. On note $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i$ l'intersection des A_i, pour $i \in I$, définie comme l'ensemble des élements x de E tels que $x \in A_i$ pour tous les entiers $i \in I$.

Exemple 13. ✎ Soit $\left(\left[1;1+\frac{1}{n}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Donner $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1;1+\frac{1}{n}\right]$ et $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1;1+\frac{1}{n}\right]$

Remarque . Les règles sur les ensembles établies dans l'exemple 12 restent valables pour des réunions (*resp.* intersections) finies ou dénombrables de sous ensembles de Ω.

IV Applications

1 Vocabulaire

Définition 1. Définir une *application* f (ou fonction [(1)]), c'est associer à tout élément x d'un ensemble E un unique élément, noté $f(x)$, d'un ensemble F.

(1). On ne fait pas de différence ici entre une application ou une fonction. Dans certains textes, une fonction associe *au plus* un élément de l'ensemble d'arrivée à tout élément de l'ensemble de départ. L'ensemble de définition peut alors être plus petit que l'ensemble de départ.

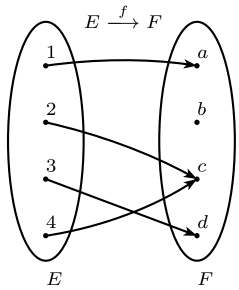
- ⋆ E est appelé l'*ensemble de définition* de f.
- ⋆ F est l'ensemble d'arrivée de f.
- ⋆ pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'*image* de x par l'application f.
- ⋆ soit A un ensemble inclus dans E. On appelle image de A par f, et on note $f(A)$, l'ensemble des images des éléments de A par f : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.
- ⋆ pour tout $y \in F$, les solutions de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x forment l'ensemble des antécédents de y par f. Cet ensemble peut-être vide, ou contenir un, plusieurs, voire une infinité d'éléments.
- ⋆ sur tout ensemble E non vide, on peut définir l'application *identité* par $\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$.

Remarque . On définira souvent une fonction par son expression :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

qui signifie que f est définie sur $E = \mathbb{R}$, à valeurs dans $F = \mathbb{R}_+$, et associe (flèche spéciale $\mapsto$) à tout x réel son carré x^2.

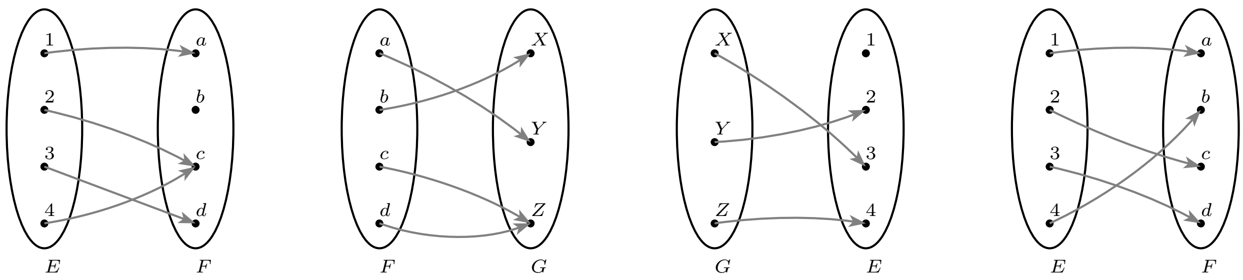
Exemple 14. ✎



1. On a schématisé ci-contre la définition d'une fonction f définie sur l'ensemble $E = [\![1\,;4]\!]$ et à valeurs dans $F = \{a; b; c; d\}$
   Donner l'image de 3 par f, l'ensemble des antécédents de c par f et l'ensemble des antécédents de b par f.
2. Définissons $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array} \right.$, $g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$,$h : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right.$,$i : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{array} \right.$
   Déterminer $f(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R}_+^*)$, $h(\mathbb{R})$, $h(\mathbb{R}_+^*)$, $j(\mathbb{R}_+^*)$

Définition. Une application $f : E \to F$ est dite
- ⋆ *surjective*, ssi tout élément de F a *au moins* un antécédent : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
- ⋆ *surjective*, ssi $f(E) = F$.
- ⋆ *injective*, ssi tout élément de F a *au plus* un antécédent : $\forall (x, z) \in E^2, f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$.
- ⋆ *bijective*, ssi tout élément de F a *exactement* un antécédent : f est surjective et injective.

f ni surjective, ni injective — *g surjective, non injective* — *h injective, non surjective* — *u bijective*



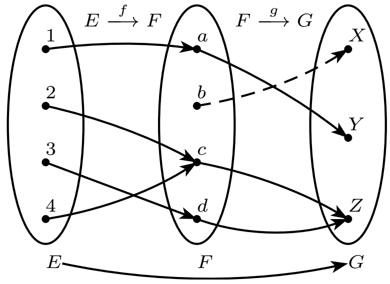
Remarque . Le cas particulier important de l'algèbre linéaire mis à part (qui sera vu plus tard), on commence souvent l'étude par la surjectivité, la résolution de $y = f(x)$ dans la recherche d'antécédent permettant parfois de prouver l'unicité du même coup.

Exemple 15. ✎ les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$ 2. $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x\,;\,y) \mapsto x + y$ 3. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

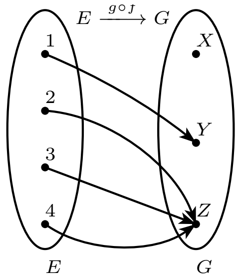
4. $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$

2 Composition



> **Définition**. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La *composée* de g et f est l'application
>
> $$g \circ f : E \to G,\ x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

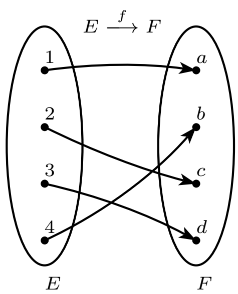
Exemple 16. Dans l'exemple ci-contre, $f(4) = c$ et $g(c) = Z$ donc $g \circ f(4) = g(f(4)) = g(c) = Z$.

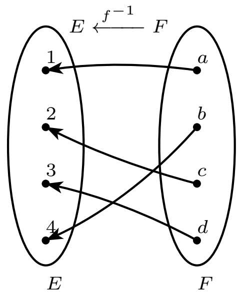


Exemple 17. ✎ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$. Donner une expression de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

⚠ *: la composition n'est pas commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général.*

> **Définition**. Dans le cas où $f : E \to F$ est une application bijective, pour tout $y \in F$, on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f. L'*application réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$.
> Par définition, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.





Exemple 18. ✎ Expliciter les applications réciproques des bijections de l'exemple 15.