Chapitre 18 : Équations différentielles

I. Résolution des équations linéaires du 1er ordre

Définition. Une équation linéaire à coefficient constant du premier ordre est une équation de la forme

$$(E) : y' + a \times y = b$$

où a est une constante et b une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On appelle (EH) l'équation « homogène » associée à (E) . avec

$$(EH) : y' + a \times y = 0. \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

Théorème 1.

Soit b une fonction continue sur $\mathbb{R}$

- ⋆ Les solutions de (EH) sur I sont les fonctions y_H définies pour t réel par :

$$y_H(t) = C\mathrm{e}^{-at}$$

où C désigne une constante réelle.

- ⋆ Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y de la forme :

$$y = y_H + y_P$$

avec $\begin{cases} y_H \text{ solutions sur } I \text{ de l'équation homogène } (EH) \text{ associée à } (E) \\ y_P \text{ une solution particulière de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$

Exemple 1. Résoudre l'équation $y'(t) + y(t) = t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.Cas particuliers

- ⋆ Dans le cas particulier où pour t réel,

$b(t) = P(t) \times \mathrm{e}^{kt}$ avec $\begin{cases} P \text{ polynôme non nul à coefficients dans } \mathbb{R} \\ k \text{ constante complexe} \end{cases}$,

une solution particulière y_P de (E) sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$y_P(t) = \begin{cases} Q(t)\,\mathrm{e}^{kt} & \text{si } k \neq -a \\ t\,Q(t)\,\mathrm{e}^{kt} & \text{si } k = -a \end{cases}$$

avec Q polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré égal à celui de P.

Exemple 2. Déterminer les fonctions numériques y solutions sur $\mathbb{R}$ des EDL suivantes écrites pour t réel :
1. $y'(t) + y(t) = 2t$ 2. $y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{t}$ $y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{-t}$ 3. $y'(t) + y(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-t}$

Remarque . Lorsque la fonction b est une constante et si la constante a est non nulle,

- ⋆ la solution particulière constante définie sur $\mathbb{R}$ par $y_P : t \mapsto y_P(t) = \dfrac{b}{a}$ définie une trajectoire appelée trajectoire d'équilibre.
- ⋆ la limite d'une solution de l'équation en $+\infty$, si elle existe, est la valeur d'une trajectoire d'équilibre.

Théorème 3. Principe de superposition

Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Soit a un réel. Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=f+g$ sont obtenues comme la somme des solutions des équations différentielles $y'+ay=f$ et $y'+ay=g$

Exemple 3. Déterminer les fonctions numériques y solutions sur $\mathbb{R}$ pour t réel,

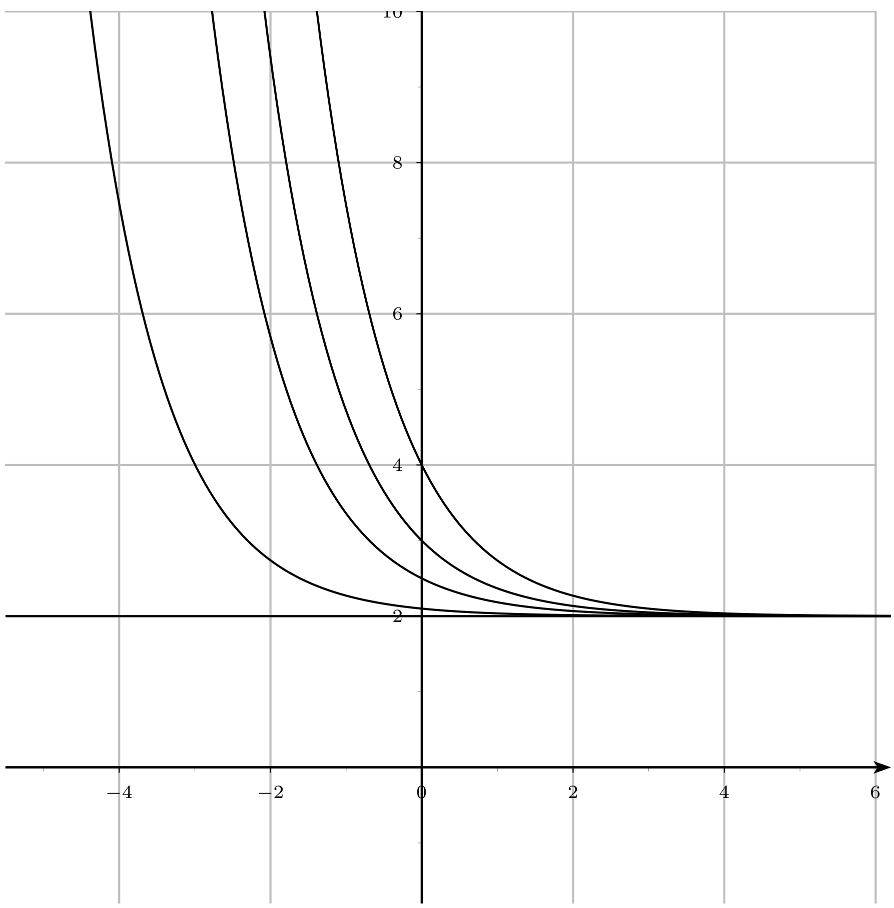
$$y'(t)+y(t)=\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}$$

Définition. On appelle trajectoire ou courbe intégrale d'une équation différentielle (E) toute courbe représentative d'une solution de (E) dans un repère orthonormé $(O;I;J)$.

Proposition 4.

Par tout couple $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$,
- ⋆ il existe une unique solution de (E) telle que $y(t_0)=y_0$
- ⋆ il existe une unique trajectoire de (E) comprenant le couple $(t_0;y_0)$. Elle peut être représentée par une courbe dans un repère $(O,I;J)$ passant par le point de coordonnées $(t_0;y_0)$.
- ⋆ Deux trajectoires de (E), distinctes, sont d'intersection vide.

Exemple 4. On considère l'équation $y'(t)+y(t)=2$ pour $t\in\mathbb{R}$. On a représenté quelques trajectoires ci-dessous. Déterminer l'expression générale des solutions et préciser l'expression d'une des trajectoires représentées et de celle de la trajectoire d'équilibre.



II. Résolution des équations linéaires du 2^e ordre

Définition. Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. Une équation linéaire à coefficient constant du deuxième ordre est une équation de la forme

$$(E) \quad : y'' + a \times y' + b \times y = c$$

où a et b sont des constantes et c une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On appelle (EH) l'équation « homogène et (EC) l'équation caractéristique associées à (E) avec :

- ⋆ $(E) \quad : y'' + a \times y' + b \times y = c$
- ⋆ $(EH) : y'' + a \times y' + b \times y = \mathbf{0}$.
- ⋆ $(EC) : r^2 + a \times r + b = \mathbf{0}$.

Exemple 5. Écrire l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire du second ordre écrite pour t réel,

$$y''(t) - y'(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}$$

Théorème 5.

Soit c une fonction continue sur I. Les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y_H définies par :

si (EC) admet :	les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y_H définies par :
deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2	$y_H(t) = C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}$
une unique solution réelle r_0	$y_H(t) = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^{r_0 t}$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes réelles.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y de la forme :

$$y = y_H + y_P$$

avec $\begin{cases} y_H \text{ solutions sur } I \text{ de l'équation homogène } (EH) \text{ associée à } (E) \\ y_P \text{ une solution particulière de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$

Exemple 6. Résoudre l'équation $y''(t) - y(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 6.

Cas particuliers

Dans le cas particulier où $c(t) = P(t) \times \mathrm{e}^{kt}$ avec $\begin{cases} P \text{ polynôme non nul à coefficients dans } \mathbb{R} \\ k \text{ constante complexe} \end{cases}$,

une solution particulière y_P de (E) sur I est définie par :

$$y_P(t) = \begin{cases} Q(t)\,\mathrm{e}^{kt} & \text{si } k \text{ n'est pas solution de } (EC) \\ t\,Q(t)\,\mathrm{e}^{kt} & \text{si } k \text{ est solution simple de } (EC) \\ t^2 Q(t)\,\mathrm{e}^{kt} & \text{si } k \text{ est solution double de } (EC) \end{cases}$$

avec Q polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré égal à celui de P.

Exemple 7. Déterminer les fonctions numériques y solutions sur $\mathbb{R}$ de

$$y"(t) - y(t) = \mathrm{e}^t + t$$

Définition. On appelle trajectoire ou courbe intégrale d'une équation différentielle (E) toute courbe représentative d'une solution de (E) dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Proposition 7.

Pour tout triplet $(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$,

- ⋆ il existe une unique solution de l'équation (E) telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$
- ⋆ il existe une unique trajectoire de (E) passant par le point de coordonnées $(t_0; y_0)$ telle que la tangente à cette courbe au point $(t_0; y_0)$ ait pour coefficient directeur y_0'.

Remarque . Lorsque la fonction c est une constante et si la constante b est non nulle

- ⋆ la solution particulière constante sur $\mathbb{R}$ définie par $y_P : t \mapsto c(t) = \dfrac{c}{b}$ définie une trajectoire appelée trajectoire d'équilibre.
- ⋆ La limite en $+\infty$ d'une solution de l'équation, si elle existe, est la valeur d'une trajectoire d'équilibre.