Propriétés élémentaires des nombres réels

Sommaire

I. Ensembles de nombres

1. Nombres entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$. C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de compter une collection d'objets.

On note $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N} - \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Exemple 1.

$$245 \in \mathbb{N}; \qquad -5 \notin \mathbb{N}; \qquad 2^5 \in \mathbb{N}; \qquad \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}; \qquad 0 \in \mathbb{N}; \qquad 0 \notin \mathbb{N}^*$$

2. Nombres entiers relatifs

L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Il est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.

En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est *contenu* (ou inclus) dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

3. Nombres décimaux

L'ensemble des *nombres décimaux* est $\mathbb{D} = \left\{\frac{n}{10^k} \text{ où } n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N}\right\}$. Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *fini* de chiffres après la virgule.

Exemple 2. $-13 \in \mathbb{D}\,;$ $\qquad 0,3333 \in \mathbb{D}\,;$ $\qquad \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}\,;$ $\qquad \frac{3}{4} \in \mathbb{D}\,;$ $\qquad 3,1416 \in \mathbb{D}\,;$ $\qquad \pi \notin \mathbb{D}.$

4. Nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

C'est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient d'un entier par un entier non nul.

Exemple 3. $-13 \in \mathbb{Q}\,;$ $\qquad 0,5 \in \mathbb{Q}\,;$ $\qquad -\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}\,;$ $\qquad \frac{22}{7} \in \mathbb{Q}\,;$ $\qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\,;$ $\qquad \pi \notin \mathbb{Q}.$

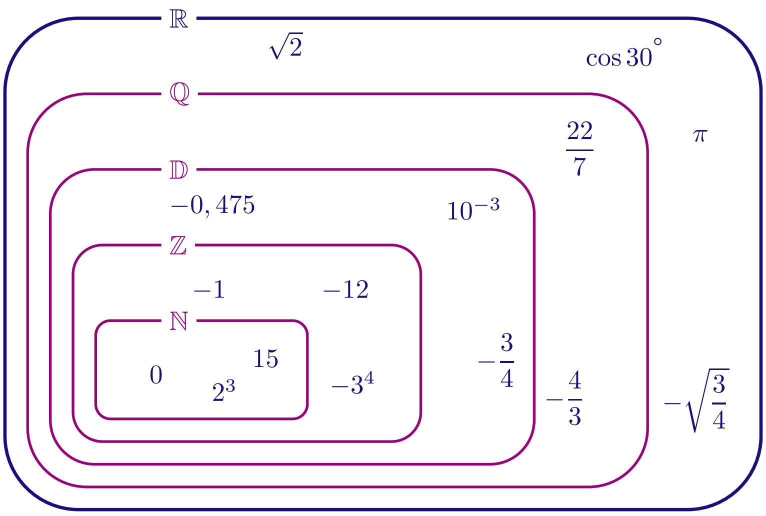
5. Nombres réels

Dès l'antiquité, on avait découvert l'insuffisance des nombres rationnels.

Par exemple, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$ on dit que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

L'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$

Inclusions

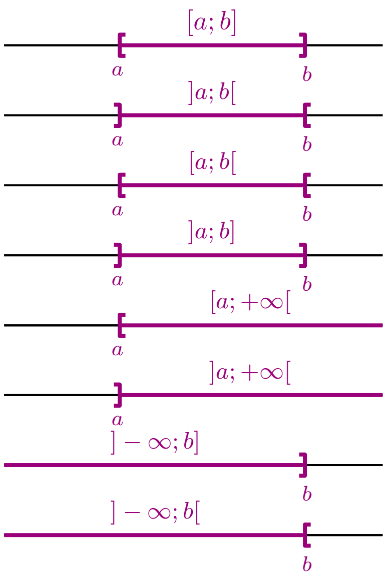


On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

6. Intervalles-intervalles d'entiers

Intervalles

Soient $a < b$ deux nombres réels :



L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a;b[$

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a;b[$

L'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$ est l'intervalle $]a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est l'intervalle $[a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est l'intervalle $]a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant b$ est l'intervalle $]-\infty;b]$

L'ensemble des réels x tels que $x < b$ est l'intervalle $]-\infty;b[$

Intervalles d'entiers

Soient $p < q$ deux entiers relatifs : l'ensemble des nombres entiers n tels que $p \leqslant n \leqslant q$ est noté $[\![p\,;q]\!]$.

II. Calcul Algébrique

1. Fractions

On rappelle qu'une fraction n'est définie que lorsque son dénominateur est non nul.

Propriétés. Soient a, b, c et d des nombres réels, non nuls si nécessaire. on a :

1. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.
2. $a \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{d}$.
3. $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$.

4. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$.
5. Pour tout nombre réel non nul k, $\dfrac{ak}{bk} = \dfrac{a}{b}$.
6. Pour tout nombre réel non nul k, $\dfrac{a:k}{b:k} = \dfrac{a}{b}$.

Il en découle :

Propriétés. Soient a, b, et c trois nombres réels, non nuls si nécessaire. on a :
1. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$
2. $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{ac}{b}$

Exemple 4. Calculer et mettre sous forme irréductible les expression suivantes :

$$A = \frac{\frac{5}{7}}{2}, \quad B = \frac{2}{\frac{5}{3}}, \quad C = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{4} - \frac{18}{5}\right)$$

Réponse

$A = \dfrac{5}{7 \times 2} = \dfrac{5}{14}$, $\quad B = \dfrac{2 \times 3}{5} = \dfrac{6}{5}$.

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{18}{5} \\ &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3} \times 3}{\cancel{2} \times 2} - \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3} \times 6}{5} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{12}{5} \\ &= \frac{3 \times 5 - 12 \times 2}{10} \\ &= -\frac{9}{10} \end{aligned}$$

2. Puissances

Définition. Soient a un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel non nul. On pose :
1. $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{\text{n fois}}$. En particulier $a^1 = a$.
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Par convention on pose $a^0 = 1$

Propriétés. Soient a, b deux nombres réels non nuls et m, et n deux entiers relatifs. On a :
1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $(a^m)^n = (a^{mn})$.
4. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$.
5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Exemple 5. Simplifier :

1. $A = \dfrac{2^{-5}}{10^{-7} \times 3^8}$.
2. $B = \dfrac{2^{-15} \times (-3)^7 \times 15^{-30} \times 14^3}{6^{-17} \times 21^3}$.

Réponse

1. $A = \dfrac{2^{-5}}{(2 \times 5)^{-7} \times 3^8} = \dfrac{2^{-5}}{2^{-7} \times 5^{-7} \times 3^8} = 2^2 \times 3^{-8} \times 5^7$.
2. $B = \dfrac{2^{-15} \times (-3)^7 \times (3 \times 5)^{-30} \times (2 \times 7)^3}{(2 \times 3)^{-17} \times (3 \times 7)^3} = \dfrac{2^{-15} \times (-3)^7 \times 3^{-30} \times 5^{-30} \times 2^3 \times 7^3}{2^{-17} \times 3^{-17} \times 3^3 \times 7^3} = -2^5 \times 3^{-9} \times 5^{-30}$.

3. Identités remarquables

Propriétés. Soient a et b deux nombres réels. On a :

En degré 2

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

En degré 3

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
3. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Exemple 6. Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $A = (4x+5)^2$.
2. $B = (2x-3)(2x+3)$.
3. $C = (3x+4)^3 - (1-2x)^3$

Réponse

1. $A = 16x^2 + 40x + 25$
2. $B = 4x^2 - 9$.
3. $C = 27x^3 + 108x^2 + 144x + 64 - (1 - 6x + 12x^2 - 8x^3) = 35x^3 + 96x^2 + 150x + 63$.

Exemple 7. Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^2 - 4$.
2. $B = (2x+3)^2 - (3x-4)^2$.
3. $C = x^2 - 10x + 25$.

Réponse

1. $A = (x-2)(x+2)$.
2. $B = (2x + 3 - (3x-4))(2x + 3 + (3x-4)) = (-x+7)(5x-1)$.
3. $C = (x-5)^2$.

4. Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition. Soit a un nombre positif. La racine carrée de a est l'unique nombre positif noté $\sqrt{a}$ tel que :

$$\sqrt{a}^2 = a.$$

Propriétés. Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls si nécessaire. On a :

1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Exemple 8. Simplifier :

1. $A = (\sqrt{5}+2)^2$.
2. $B = \sqrt{6} \times \sqrt{21} \times \sqrt{14}$.
3. $C = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

Réponse

1. $A = 9 + 4\sqrt{5}$.
2. $B = \sqrt{6 \times 21 \times 14} = \sqrt{3 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 7} = \sqrt{(2 \times 3 \times 7)^2} = 2 \times 3 \times 7 = 42$.
3. $C^2 = 5 + 2\sqrt{6} = \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$.
   Donc $C = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Méthode.

Pour simplifier une fraction de la forme $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$ où a et b sont deux nombres réels, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée de $a+\sqrt{b}$, c'est à dire, $a-\sqrt{b}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+\sqrt{b}} &= \frac{a-\sqrt{b}}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} \\ &= \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b} \end{aligned}$$

Exemple 9. ✎ Simplifier :

1. $D = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.
2. $E = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

III. Fonctions affines

Définition. On appelle fonction afine toute fonction f, définie pour tout réel x, par $f(x) = ax + b$ où a, et b sont deux nombres réels.

1. Tableau de signes

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

2. Variations

Propriétés. Soit f $x \mapsto ax+b$ une fonction affine, on a :

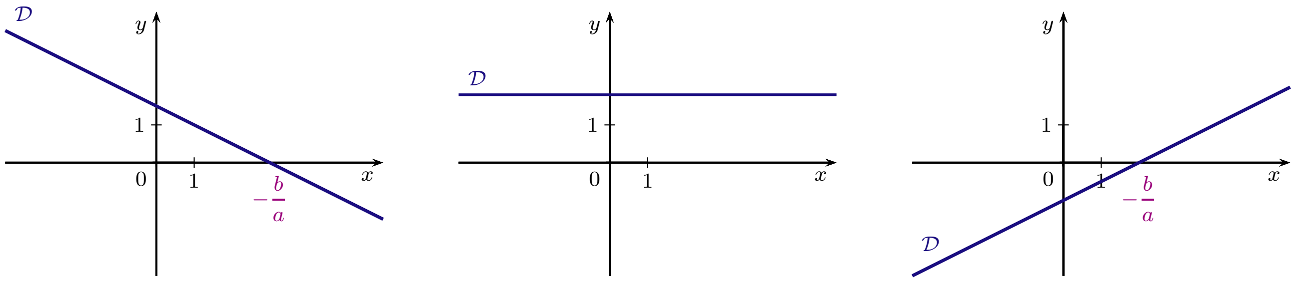
1. f est strictement croissante si $a > 0$.
2. f est strictement décroissante si $a < 0$.
3. f est constante si $a = 0$.

3. Courbe représentative

Soit a et b deux réels.

La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax+b$.

$a < 0$ $a = 0$ $a > 0$



Exemple 10. ✎ Tracer la courbe représentative de f lorsque :

1. $f(x) = 2$.
2. $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 3$.
3. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

IV. Polynômes du second degré

> **Définition**. On appelle polynôme du second degtré ou trinôme toute fonction P, définie pour tout réel x, par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a,\ b$ et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

1. Forme canonique

Propriétés. Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

Exemple 11. ✎ Ecrire sous forme canonique :

1. $f(x) = 2x^2 + x + 1$.
2. $g(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

2. Tableau de variations

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

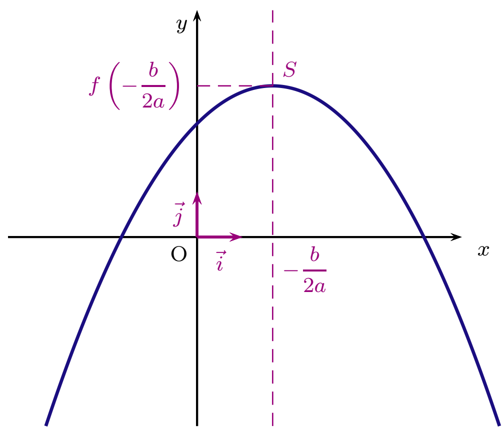
$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

3. courbe représentative

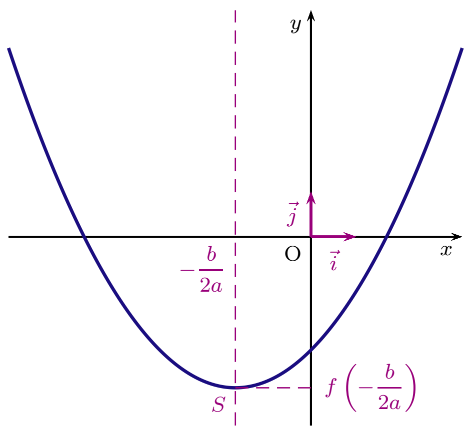
Dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole. Le sommet S de la parabole a pour abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

$\boxed{a < 0}$



La parabole est tournée vers le bas

$\boxed{a > 0}$



La parabole est tournée vers le haut

4. Équation du second degré

Propriétés. Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels fixés avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- ⋆ Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution ; $S = \emptyset$.
- ⋆ Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution ; $S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
- ⋆ Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions ; $S = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6x^2 - 3 = 7x$

Réponse

Pour tout réel x, $6x^2 - 3 = 7x \Leftrightarrow 6x^2 - 7x - 3 = 0$. Il s'agit de résoudre une équation du second degré avec $a = 6$, $b = -7$ et $c = -3$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-3) = 49 + 72 = 121$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_1 = \frac{7-11}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_2 = \frac{7+11}{12} = \frac{3}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $6x^2 - 3 = 7x$ est $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right\}$

Remarque . Les solutions éventuelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont aussi appelées les racines du trinôme ax^2+bx+c.

5. Factorisation

Factorisation du trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$:

- ⋆ Si $\Delta < 0$ alors le trinôme ne se factorise pas.
- ⋆ Si $\Delta = 0$ en notant x_0 l'unique racine : $f(x) = a(x-x_0)^2$.
- ⋆ Si $\Delta > 0$ en notant x_1 et x_2 les deux racines : $f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$.

6. Signe du trinôme

Propriétés. Soit f un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

- ⋆ Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.
- ⋆ Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
- ⋆ Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et $f(x)$ est du signe contraire de celui de a pour tout réel $x \in]x_1; x_2[$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe du trinôme ax^2+bx+c		$signe(a)$	0	$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

Remarque . On retiendra la règle « Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines.

Exemple 12. Résoudre l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$.

Réponse

Étudions le signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3$ avec $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = -1$ et $c = 3$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-1)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) \times 3 = 1 + 3 = 4$.

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_1 = \frac{1-2}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_2 = \frac{1+2}{-\frac{1}{2}} = -6$$

Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines. Ainsi :

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
Signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$ est $S =]-\infty; -6] \cup [2; +\infty[$.

Exemple 13. Étudier les positions relatives de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 3$

Réponse

Les positions relatives de la parabole et de la droite se déduisent du signe de

$$x^2 - (2x - 3) = x^2 - 2x + 3$$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$.
Comme $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a donc pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 > 0$.

La parabole $\mathcal{P}$ est au dessus de la droite $\mathcal{D}$.

V. Inéquations

Pour résoudre une inéquation à une inconnue on peut être amené à étudier le signe d'une expression.

Résoudre $A(x) \leqslant B(x)$ équivaut à résoudre $A(x) - B(x) \leqslant 0$.

1. Étude du signe d'un produit

Méthode.

Pour étudier le signe d'un produit :

- ⋆ On étudie le signe de chaque facteur.
- ⋆ On regroupe dans un tableau le signe de chaque facteur. La première ligne du tableau contenant les valeurs, rangées dans l'ordre croissant, qui annulent chacun des facteurs.
- ⋆ On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

Exemple 14. ✎ Résoudre les inéquations en utilisant un tableau de signes :

1. $(5 - 4x^2)(3x - 4) \leqslant (-6x + 8)(2x - 3)$.
2. $(x^2 + 4x)(2x + 1) > 4x^2 - 1$.

2. Étude du signe d'un quotient

Méthode.

Pour étudier le signe d'un quotient :

- ⋆ On cherche les valeurs qui annulent le dénominateur (valeurs interdites).
- ⋆ On regroupe dans un tableau le signe de chaque terme.
- ⋆ On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

Exemple 15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2$

Réponse

Le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel x tel que le dénominateur $3x+2 \neq 0$.

Comme $3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{2}{3}$, le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel $x \neq -\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2 &\Leftrightarrow \frac{2x+7}{3x+2} - 2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(2x+7) - 2 \times (3x+2)}{3x+2} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{2x+7-6x-4}{3x+2} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0\end{aligned}$$

Étudions le signe du quotient $\dfrac{3-4x}{3x+2}$ à l'aide d'un tableau de signe.

On étudie les signes de chacun des termes du quotient :

$$3-4x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad 3x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{3}$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des termes et, on en déduit le signe du quotient en utilisant la règle des signes d'un quotient.

La double barre dans le tableau indique que $-\dfrac{2}{3}$ est une valeur interdite :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$3-4x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{3-4x}{3x+2}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0$ est $S = \left]-\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}\right]$.

Exemple 16. ✎ Résoudre les inéquations en utilisant un tableau de signes :

1. $\dfrac{2x-1}{2x^2-x-1} \geqslant 0$.
2. $\dfrac{3x+7}{2x-1} \leqslant \dfrac{7x+3}{-x+2}$.

VI. Valeur absolue

Définition. Pour tout nombre réel x, la valeur absolue de x est égale à la distance de ce nombre à 0. Elle est notée $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Exemple 17. $|2| = 2$; $|-3| = 3$; $\left|-\dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{3}{4}$; $1 - \left|-\dfrac{4}{3}\right| = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$

Remarque .
- $\star$ $|x| = |-x|$.
- $\star$ $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.

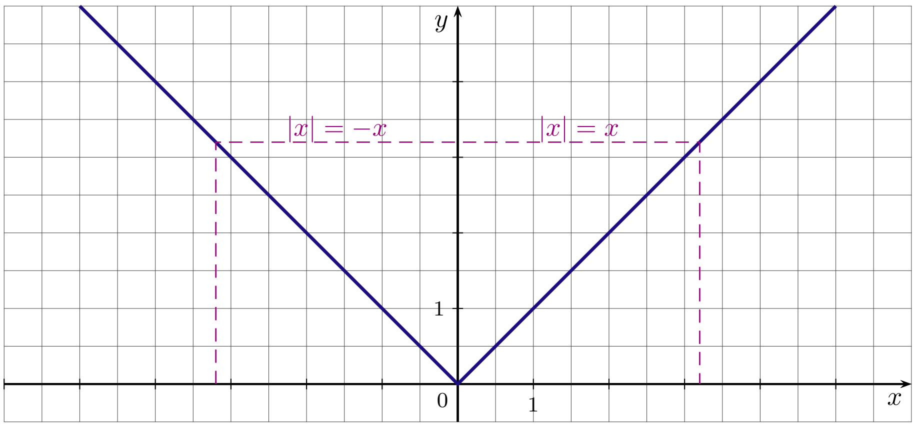
1. Variations

Définition. La fonction valeur absolue définie pour tout réel x par $f(x) = |x|$ est :

- ⋆ strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$;
- ⋆ strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \lvert x \rvert$		↘	0	↗	

2. Courbe représentative



Exemple 18. ✎ Résoudre les équations :

1. $|2x - 3| \geqslant 1$.
2. $|2x - 3| \leqslant |5 - 3x|$.