Chapitre 10 : Séries réelles

I. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier plus en détail un certain type de suites déjà rencontrées : les suites définies par une somme, qui sont appelées des **séries**.

Ces suites particulières interviennent un peu partout en mathématiques, notamment en probabilité, lorsqu'on étudie les probabilités discrètes sur des ensembles infinis.

II. Généralités et exemples

Définition. Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite. La **série** de terme général u_n est la suite (S_n) définie par : $\forall n \geqslant n_0,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
Le terme S_n est appelé la **somme partielle d'indice** n de la série. La série elle même est notée $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.

Exemple 1. Les séries qui suivent ont une importance particulière :

1. la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} q^n$, avec $q \in \mathbb{R}$, est la **série géométrique** de raison q.
2. la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$, avec $x \in \mathbb{R}$, est la **série exponentielle**.
3. la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est une **série de Riemann**.
4. la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**. (c'est aussi une série de Riemann pour $\alpha = 1$).

✎ Donner l'expression générale de la somme partielle d'une série géométrique en fonction de q (distinguer $q = 1$ et $q \neq 1$).

1. Convergence et divergence de séries

Définition. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est **convergente** si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ des sommes partielles converge. Dans ce cas, sa limite est appelée la **somme** de la série et notée $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ (c'est une autre notation de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$).
Si la série ne converge pas, elle est dite **divergente** ce qui signifie que $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ à une limite infinie ou pas de limite.

Enfin, étudier la **nature d'une série**, c'est déterminer si elle converge ou pas. Dans le premier cas, on cherche alors à expliciter sa somme si c'est possible.

Exemple 2. ✎ Étudier la nature des séries géométriques en fonction de q, puis de la série de terme général n.

Proposition 1.Divergence grossière

Lorsque la série converge, son terme général tend nécessairement vers 0. Au contraire, lorsque le terme général ne tend pas vers 0, la série ne converge jamais. On dit qu'elle diverge **grossièrement**.

Remarque . ⚠il existe des séries dont le terme général tend vers 0 et qui sont divergentes. Un exemple **à connaître par coeur** est celui de la série harmonique.

Proposition 2.

Soient n_0 et n_1 deux entiers naturels. Alors, les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_1} u_n$ ont la même nature. En revanche, si elles sont toutes les deux convergentes, leurs sommes respectives sont en générales différentes.

Démonstration. ✎

III. Séries usuelles

1. Séries géométriques et leurs séries dérivées

Théorème 3.

Les séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum(n-1)q^{n-1}$ sont convergentes si et seulement si $-1 < q < 1$. Dans ce cas :

1. $$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$
2. $$\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$
3. $$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Démonstration. ✎ Le premier résultat à été démontré dans l'exemple 2.

Remarque .

1. Le premier terme de la série géométrique dérivée est nul et les deux premiers termes de la série géométrique dérivée deux fois sont nuls. Les séries $\sum n(n-1)q^{n-2}$ et $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ ont donc non seulement la même nature mais aussi la même somme quand elles convergent.
2. On peut remarquer qu'on obtient la somme de la série géométrique dérivée en dérivant par rapport à q la somme de la série géométrique et la somme de la série géométrique dérivée deux fois en dérivant deux fois par rapport à q la somme de la série géométrique. Cela permet de retrouver facilement les deux dernières formules connaissant la première.
3. On ne donne des résultats que sur les deux premières dérivées car ce sont celles qu'on utilise le plus fréquemment, notamment pour les calculs d'espérance et de variance en probabilité. Mais le reste fonctionne pareil.

2. Série exponentielle

Théorème 4.

La série de terme général $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x. De plus, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Démonstration. ✎ En admettant la convergence, dériver formellement l'expression de gauche dans l'égalité du théorème précédent puis calculer la valeur de cette expression pour $x = 0$. Conclure. (ce n'est pas une preuve rigoureuse, mais l'idée)

3. Séries de Riemann

Proposition 5.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha \leqslant 1$.

Remarque .

1. La série harmonique, qui correspond au cas limite $\alpha = 1$, est divergente. De même $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c'est une série de Riemann, pour $\alpha = \frac{1}{2}$) diverge. Si $\alpha \leqslant 0$, on a une série qui diverge grossièrement.
2. En général, en cas de convergence, on ne sait pas donner explicitement la valeur de la somme. Dans certains cas particuliers (les entiers pairs), on connaît la valeur de la somme, par exemple : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
   En revanche, la connaissance complète des séries de Riemann est encore une affaire non résolue.

Démonstration. ✎ **Cas de la série harmonique** :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant S_n la somme partielle de la série harmonique, montrer que $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.

Cas de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$: réfléchir, sur les conclusions qu'on peut tirer des exemples 5.4 et 6.2 du chapitre 4 quant à la convergence de cette série (en revanche, le calcul de la somme nécessite des outils qui ne sont pas au programme de ECE...).

IV. Techniques pour les calculs de somme

1. linéarité et relation de Chasles

Sous condition de convergence, les propriétés de linéarité restent les mêmes que pour les sommes finies :

Proposition 6.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont même nature et **en cas de convergence :** $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$
2. **Si** $\sum u_n$ **et** $\sum v_n$ **convergent**, alors $\sum(u_n+v_n)$ converge et sa somme est $\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k+v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$

La relation de Chasles aussi, sous les mêmes conditions :

Proposition 7.

Pour tout entier n_0 les séries $\sum u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ont même nature et **en cas de convergence** : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$

Exemple 3. ✎ Justifier la convergence et calculer les sommes suivantes :
1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3^k}{2^{k+1}k!}+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}\right)$ 4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k+3))\,e^{-k}$ 5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{3-2k}{2^k}$

2. Astuce du chef

Il est souvent utile pour faire apparaître des séries usuelles d'utiliser que $k^2=k(k-1)+k$, ou que $k=(k-1)+1$.

Exemple 4. ✎ Justifier la convergence et calculer les sommes suivantes :
1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2}{5^k}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^2\,\mathrm{e}^k$ 3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2k^2-3k+1}{k!}$

V. Télescopages

Proposition 8.

Une suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est convergente, et en cas de convergence on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\lim_{n\to+\infty}u_n-u_0$$

Démonstration. ✎

Exemple 5. ✎

1. Soit (u_n) de premier terme $u_0\in]0;1[$ vérifiant la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n-u_n^2$. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f:x\mapsto x-x^2$
   (a) Dresser le tableau de variations de f. (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in]0;1[$.
   (c) Étudier la monotonie puis la convergence de (u_n). Déterminer sa limite.
   (d) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et préciser sa somme.

2. Soient (u_n) et (v_n) définies par les relations de récurrence suivantes : $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n!}$ et $v_{n+1}=v_n+n^2e^{-n}$
   Montrer que ces suites convergent et préciser leur limite.

VI. Quelques résultats de convergence

1. Séries à termes positifs et comparaison

Les théorèmes de convergence sur les suites s'appliquent aussi à l'étude des séries. Il suffit pour cela d'appliquer ces théorèmes à la suite des sommes partielles.

Théorème 9.

Une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée. Sinon elle diverge vers $+\infty$.
Cela revient à dire qu'on peut déduire la nature d'une série à terme positif par comparaison de son terme général avec celui d'une autre série à terme positif.

Démonstration. ✎

Remarque . C'est bien sûr également le cas pour une série à termes négatifs si et seulement si elle est minorée.

Exemple 6. ✎

1. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$.

   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant e^{-k}$ (b) Déduire que la série converge.

2. On considère la série $\sum \dfrac{2n^2}{n^3 - \frac{1}{2}}$.

   (a) Montrer que : $\forall k \geqslant 1$, $\dfrac{2k^2}{k^3 - \frac{1}{2}} \geqslant \dfrac{2}{k}$ (b) Déduire la nature de la série.

VII. Convergence absolue

Définition. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Remarque . Pour une série à termes positifs, la convergence et la convergence absolue sont deux notions identiques.

C'est également le cas pour une série à terme négatif, par linéarité.

Théorème 10.

Si une série converge absolument, alors elle converge. ⚠La réciproque est fausse.

Exemple 7. ✎ On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$. On note S_n sa somme partielle d'ordre n.

1. Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Déduire que cette série est convergente, mais pas absolument convergente.