Chapitre 10 : Calcul différentiel

Sommaire

I Nombre dérivé **2**
1 Vocabulaire et première application . . . 2
2 Interprétation géométrique . . . 2
3 Développement limité d'une fonction à l'ordre 1 . . . 3
4 Lien entre la continuité et la dérivabilité . . . 4

II Fonction dérivée **4**
1 Dérivabilité sur un intervalle . . . 4
2 Dérivée d'une fonction réciproque . . . 4
3 Dérivées successives. Espaces $\mathcal{C}^p$ . . . 5

III Applications de la dérivation **5**
1 Extremum local . . . 6
2 Inégalités des acroissements finis . . . 6
3 Variations . . . 7

IV Convexité et concavité **7**
1 Convexité et concavité pour des fonctions quelconques . . . 7
2 Convexité pour les fonctions dérivables . . . 7
3 Convexité pour les fonctions deux fois dérivables . . . 8

I. Nombre dérivé

1. Vocabulaire et première application

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Le **taux d'accroissement** $\tau_{x_0,h}(f)$ de f entre $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$ est

$$\tau_{x_0,h}(f) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si la limite, lorsque h tend vers 0, du taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}(f)$ **existe et est finie**, la fonction f est dite **dérivable** en x_0. Cette limite est alors appelée le **nombre dérivé** $f'(x_0)$ de f en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

S'il existe une limite finie à gauche (*resp.* à droite), on dit que f est dérivable en x_0 à gauche (*resp.* à droite) et on note $f'_g(x_0)$ (*resp.* $f'_d(x_0)$) cette limite, appelée nombre dérivé à gauche (*resp.* à droite).

Exemple 1. ✎ $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? Même question pour $g : x \mapsto x\sqrt{x}$ et pour la fonction valeur absolue.

Remarque . L'égalité des deux limites de la définition ci-dessus s'obtient en posant $x = x_0 + h$, reprenant l'idée de la méthode 3 du chapitre 8 : il est parfois plus facile de considérer des limites lorsque la variable tend vers 0.

Proposition 1.« indéterminations levées via un taux d'acroissement »

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$ 4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$

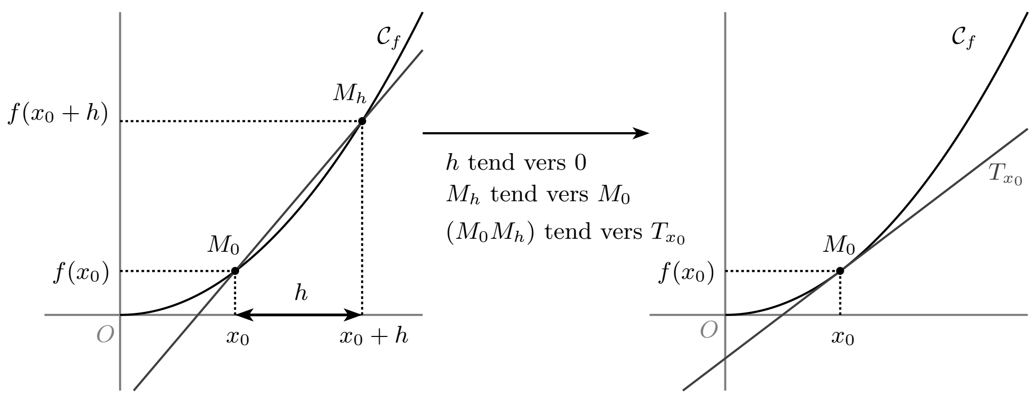
Démonstration. ✎ en admettant la dérivabilité d'une fonction adaptée en 0, utiliser directement la définition

Remarque . Il y a en fait une arnaque dans la démonstration précédente. Il faudrait en fait démontrer la dérivabilité pour calculer cette limite, mais calculer cette limite revient, d'après la définition, à montrer la dérivabilité ! Pour démontrer honnêtement ces résultats, il faut faire autrement

Exemple 2. ✎ Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x(x+1) - 1}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e}$, $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4}$

2. Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On note M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 et M_h le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0 + h$.



Exemple 3. ✎ 1. Justifier que le coefficient directeur de (M_0M_h) à la courbe $\mathcal{C}_f$ est égal à $\tau_{x_0,h}(f)$.
2. Déduire le coefficient directeur de la tangente T_{x_0}.

Proposition 2.

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. La **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est la droite T_{x_0} d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

En particulier, le **coefficient directeur de cette tangente est égal à** $f'(x_0)$.

Exemple 4. ✎ Soit $f : x \mapsto \ln(x+1)$. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ pour lesquels la tangente est parallèle à $d : y = x$.

Proposition 3.

Si f non dérivable en x_0 mais $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une (demi-)tangente verticale en x_0.

Exemple 5. ✎ Donner un exemple parmi les fonctions usuelles.

3. Développement limité d'une fonction à l'ordre 1

Définition. Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre 1 en** x_0 (on notera parfois $\mathrm{DL}_1(x_0)$) lorsqu'il existe deux réels a et b tels que, pour h suffisamment proche de 0 :

$$f(x_0 + h) = a + bh + h\varepsilon(h), \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Remarque .

1. De manière équivalente, on peut dire que pour x suffisamment proche de x_0, on a : $f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$, toujours en posant $x = x_0 + h$
2. La quantité $h\varepsilon(h)$ est, par définition, négligeable devant h lorsque h tend vers 0. On peut alors la noter $o(h)$, ce qui se lit « petit o de h » (il est sous-entendu que c'est au voisinage de 0). L'égalité de la définition précédente s'écrit donc : $f(x_0 + h) = a + bh + o(h)$.
   De la même manière, on peut noter $f(x) = a + b(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$ (« petit o de $x - x_0$ au voisinage de x_0 »).
3. Le DL est dit à l'ordre 1 car la quantité $a + bh$ est un polynôme de degré 1 en la variable h . On peut *a priori* définir des DL à tous les ordres.
   Le $\mathrm{DL}_0(x_0)$ de f s'écrit $f(h) = a + \varepsilon(h)$, avec a réel (a est bien un polynôme de degré 0) et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
   Le $\mathrm{DL}_2(x_0)$ de f s'écrit $f(h) = a + bh + ch^2 + h^2\varepsilon(h)$, avec a, b, c réels ($a + bh + ch^2$ est un polynôme de degré 2) et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
4. L'idée des DL est de faire l'approximation d'une fonction par un polynôme, de manière **locale** (l'égalité n'est valable que lorsque h est proche de 0, c'est à dire lorsque x est proche de x_0.)

Théorème 4.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est dérivable en x_0
2. f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0

Le DL est alors unique et, nécessairement : $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.
Autrement dit, pour h suffisamment proche de 0, ou encore pour x suffisament proche de x_0 :
$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$ ou encore $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$.

Remarque . Lorsque x est suffisamment proche de x_0, cela signifie que la courbe représentative de f est très proche de sa tangente en x_0. On parle d'approximation affine : $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Pour des valeurs de x suffisamment proches de x_0, T_{x_0} est en fait la droite qui est la plus proche de la courbe représentative de f.

Exemple 6. ✎ 1. Donner les développements limités à l'ordre 1 en 0 de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto \ln(1-x)$, ainsi que les développements limités à l'ordre 1 en 1 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1-x}$ et $x \mapsto \ln x$.

2. En utilisant l'approximation affine pour une fonction f supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, donner une valeur approchée de $f(3,05)$ sachant que $f(3) = 1$ et $f'(3) = 6$.

4. Lien entre la continuité et la dérivabilité

Théorème 5.« continuité vs dérivabilité »

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors, f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0. ⚠La réciproque est fausse !

Démonstration. ✎ Pour le sens direct, écrire le $\mathrm{DL}_1(x_0)$ de f et passer à la limite. Pour le contre-exemple, regarder parmi les fonctions usuelles.

II. Fonction dérivée

1. Dérivabilité sur un intervalle

Définition. Quand f admet un nombre dérivé en tout point $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable sur I. On définit alors la **fonction dérivée**, notée $f' : x \mapsto f'(x)$.

Exemple 7. ✎ 1. Retrouver "à la main" la fonction dérivée de la fonction carrée.

2. Montrer à la main que la dérivée de $u+v$ est $u'+v'$. 3. En se servant de l'égalité ci-dessous, établir la formule de dérivation d'un produit : $u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0) = u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0+h)v(x_0) + u(x_0+h)v(x_0) - v(x_0)u(x_0)$.

Remarque . Il est important d'avoir compris que toutes les formules de dérivée des fonctions usuelles, des opérations sur les dérivées, ont été obtenues via des calculs de limites (ou des calculs de développements limités) comme dans l'exemple précédent. Fort heureusement, on ne vous demande pas de redémontrer ces résultats à chaque fois mais juste de les utiliser.

2. Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 6.

Soit I un intervalle et f une bijection de I sur $f(I)$. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \text{ c'est à dire que pour } y \in f(I), \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Exemple 8. ✎ Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f, puis résoudre $f(x) = 0$
2. Justifier que f définit une bijection de l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ sur l'intervalle $f(I)$, à déterminer.
3. On note g fonction réciproque de f, définie sur $f(I)$ dans la question précédente.
4. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en 0.

3. Dérivées successives. Espaces $\mathcal{C}^p$

Définition. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $f^{(p)}$, lorsqu'elle existe, **la dérivée p-ième de** f, c'est à dire obtenue en dérivant p fois la fonction f.
Par exemple $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ (« f seconde »).

Définition. Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I lorsque :

1. f est p fois dérivable sur I. 2. $f^{(p)}$ est continue sur I.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque, pour tout entier p, f est p fois dérivable sur I.

Exemple 9. ✎ Que sont les fonctions $\mathcal{C}^0$ sur un intervalle ?

Théorème 7.« Théorèmes généraux sur les fonctions dérivables et $\mathcal{C}^p$ »

Une fonction définie comme la somme, la différence, le produit, le quotient, la composée de fonction dérivables (*resp.* $\mathcal{C}^p$) est dérivable (*resp.* $\mathcal{C}^p$) sur tout intervalle où elle est définie.

Remarque . Comme pour la continuité, ces résultats permettent de conclure positivement mais pas négativement. Dans la pratique, on utilise les théorèmes généraux en priorité et il reste parfois quelques valeurs à étudier à la main.

Exemple 10. ✎ 1. Donner le **domaine de dérivabilité** I de $f : x \mapsto x\sqrt{x}$. Cette fonction est-elle $\mathcal{C}^1$ sur I ? $\mathcal{C}^2$?
2. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes : (a) $x \mapsto x|x|$ (b) $x \mapsto |\ln(x)|$

Voici enfin un théorème qui évite de passer systématiquement par des limites de taux d'accroissements pour montrer le caractère $\mathcal{C}^p$ des fonctions.

Théorème 8.« Théorème de prolongement $\mathcal{C}^p$ »

Soit $p \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si $f^{(p)}$ est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I si et seulement si $f^{(p+1)}$ admet une limite finie l en x_0, et dans ce cas $f^{(p+1)}(x_0) = l$

Exemple 11. ✎ Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement $\mathcal{C}^1$ en 0 ? $\mathcal{C}^2$? $\mathcal{C}^p$ jusqu'à quel ordre ?
1. $f : x \mapsto \begin{cases} 1+x \text{ si } x>0 \\ e^x \text{ si } x<0 \end{cases}$ 2. $g : x \mapsto x^3 \ln x$ 3. $h : x \mapsto x^x$ 4. $x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x<0 \end{cases}$

III. Applications de la dérivation

Une première application à déjà été vue : le calcul de certaines limites en reconnaissant un taux d'acroissement.

L'application principale de la dérivée est évidemment l'étude des variations d'une fonction sur un intervalle, ou encore la recherche d'extrema locaux. On profite d'ailleurs de ce chapitre pour introduire cette notion.

Définition. On dit que f possède un **maximum local** en x_0 si $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour x situé dans un voisinage de x_0.

On dit que f possède un **minimum local** en x_0 si $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour x situé dans un voisinage de x_0.

Dans les deux cas, on dit que f possède un **extremum local** en x_0 (cet extremum est $f(x_0)$).

Si les inégalités précédentes ont lieu sur tout un intervalle I contenant x_0, on dit que l'extremum est **global** sur I.

Remarque . Pour bien faire la différence entre local et global, imaginez les sommets de toutes les montagnes, petites collines, petites bosses (tous des maxima locaux) et le sommet de l'Everest (le seul maximum global sur la terre).

1. Extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un point intérieur à I.

Le résultat suivant donne une **condition nécessaire** pour que f ait un extremum local en x_0 :

Théorème 9.

Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$ alors $f'(x_0) = 0$.

Le résultat suivant donne une **condition suffisante** pour que f ait un extremum local en x_0 :

Théorème 10.

Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe** alors f a un extremum local en x_0.

Exemple 12.

1. $f : x \mapsto x^3$ admet-elle un extremum en 0 ?
2. $f : x \mapsto \dfrac{ax^2 + x - 1}{2x - 3}$. Comment choisir a pour que f admette un maximum local en $x = 1$?

2. Inégalités des acroissements finis

Théorème 11.« IAF »(admis)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.

- **Version 1.** Si de plus il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in I, m \leqslant f'(x) \leqslant M$:
  Alors $\forall (a,b) \in I^2, a \leqslant b$, on a : $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$
- **Version 2.** Si de plus il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant M$:
  Alors $\forall (a,b) \in I^2$, on a $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$

Remarque . L'inégalité des accroissements finis exprime graphiquement que la courbe représentative de f est située entre les droites d'équation $y = f(a) + m(x-a)$ et $y = f(a) + M(x-a)$ sur l'intervalle $[a;b]$.

Exemple 13 (Application fondamentale de l' IAF). ♡ ✎ Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I vérifiant $f(I) \subset I$ et $|f'(x)| \leqslant k < 1$, avec $k \in \mathbb{R}_+$. Soit $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$.
Soit enfin une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défine par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| \leqslant k\,|u_n - l|$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant k^n\,|u_0 - l|$.
3. Que conclure sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Application : on suppose $k = \dfrac{1}{2}$ et $|u_0 - l| \leqslant 1$. A partir de quels rangs a-t-on $|u_n - l| \leqslant 10^{-3}$? $|u_n - l| \leqslant 10^{-6}$? Que dire de la vitesse de convergence d'une telle suite ?

3. Variations

Théorème 12.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est constante sur $I \Leftrightarrow f' = 0$ sur I.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur $I \Leftrightarrow f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I.
3. f est strictement croissante (resp.strictement décroissante) sur $I \Leftrightarrow f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I sauf en des points isolés où elle s'annule.

Démonstration. ✎ Utliser l'IAF, version 1, avec les bonnes valeurs de m et/ou de M.

IV. Convexité et concavité

La définition de la convexité et de la concavité n'est pas la même que celle donnée en classe de TES, qui était reliée à la position de la courbe par rapport aux tangentes et nécessitait donc de considérer des fonctions dérivables. Bien entendu, dans le cas où f est dérivable, la définition ci-dessous est équivalente à celle donnée en TES.

1. Convexité et concavité pour des fonctions quelconques

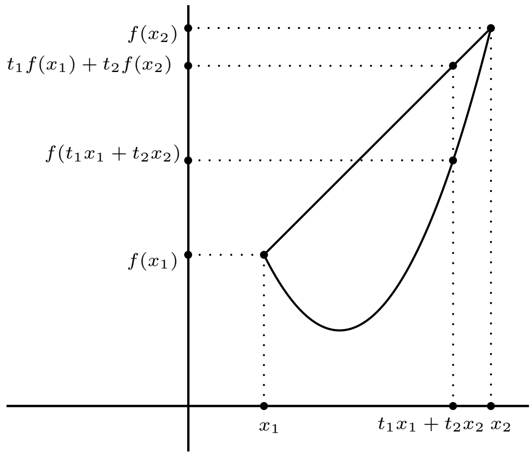
Définition. Une fonction est dite **convexe** sur un intervalle I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$

Une fonction est dite **concave** sur un intervalle I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \geqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$

On appelle **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ un point d'abscisse x_0 tel que f change de convexité en x_0



Remarque .
1. Dire que f est concave sur I revient donc à dire que la fonction $-f$ est convexe sur I
2. Graphiquement, dire que f est convexe sur $I = [a; b]$ revient à dire que l'arc de courbe joignant les points d'abscisses a et b est en dessous de la corde, c'est à dire la droite joignant ces deux points, comme le montre l'illustration ci-dessus. C'est le contraire si f est concave, au vu de la remarque qui précède.
3. Si on ne veut pas tracer les cordes, on peut visualiser la convexité ainsi : f est convexe lorsque sa courbe représentative a sa « bosse »tournée vers le bas, concave lorsque la « bosse »est tournée vers le haut.

Exemple 14. Donner des fonctions usuelles qui ont l'air convexes, concaves, possédant un point d'inflexion.

En admettant ces résultats de convexité, justifier les inégalités suivantes :

1. $\mathrm{e}^x \leqslant (\mathrm{e}-1)x + 1$ sur $[0;1]$. 2. $\ln(x) \geqslant \dfrac{x-1}{\mathrm{e}-1}$ sur $[1;\mathrm{e}]$.

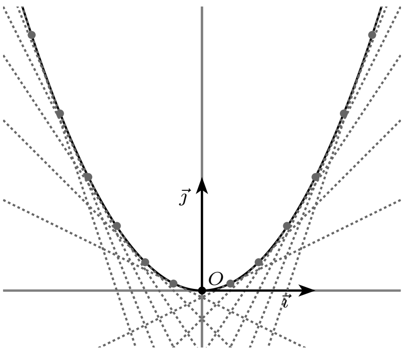
2. Convexité pour les fonctions dérivables

Le théorème précédente a le défaut d'être très difficile à utiliser. Lorsque la fonction f est dérivable, on a un résultat plus simple à exploiter.

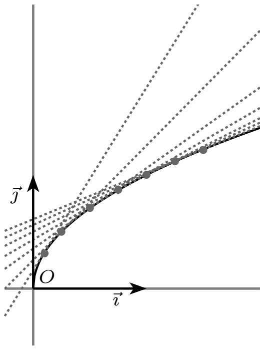
Théorème 13.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, de courbe $\mathcal{C}_f$.

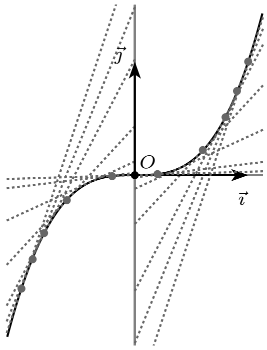
- f est **convexe** sur I, si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est **convexe** sur I, si et seulement si sa courbe est située au dessus de chacune de ses tangentes.
- f est **concave** sur I, si et seulement si f' est décroissante sur I.
- f est **concave** sur I, si et seulement si sa courbe est située en dessous de chacune de ses tangentes.
- le point A d'abscisse x_0 de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un **point d'inflexion** si et seulement si f' change de monotonie en x_0 (donc si f' admet un extremum local en x_0).
- le point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un **point d'inflexion** si et seulement si la tangente en A traverse la courbe.



La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.



La fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$.



O point d'inflexion. La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}^-$, convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple 15. ✎ Donner l'équation de la tangente T_{x_0} à la parabole $\mathcal{P}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point d'abscisse x_0. Etudier la position relative de T_{x_0} et $\mathcal{P}$ (identité remarquable !). Conclure. En déduire que pour $x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2+1}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$

3. Convexité pour les fonctions deux fois dérivables

Comme la plupart des fonctions étudiées sont au minimum deux fois dérivables, le théorème suivant s'avère être **le plus pratique de tous** pour étudier la convexité des fonctions.

Théorème 14.

- f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I.
- f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.
- le point d'abscisse x_0 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0.

Exemple 16. ✎ Étude complète (ensemble de définition, limites, variations, extrema, convexité, points d'inflexions, ébauche de tracé) des fonctions définies par : 1. $f(x) = ln(1+x^2)$ 2. $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$