Chapitre 14 : Primitives et intégrales

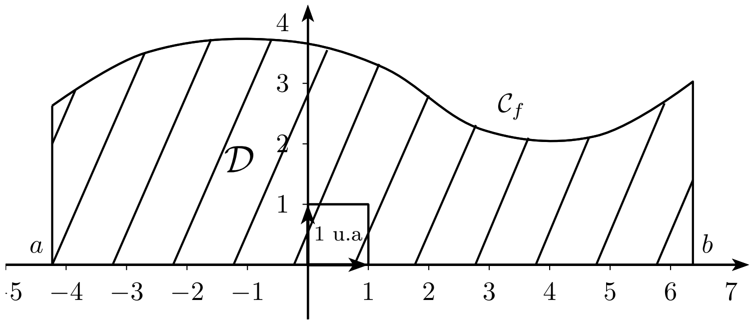
Sommaire

I. Notions d'intégrales

Définition. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ et deux réels a et b tels que $a \leqslant b$. Une **unité d'aire** (notée u.a.) est l'aire du rectangle de côtés $\|\overrightarrow{\imath}\|$ et $\|\overrightarrow{\jmath}\|$.
Si f est de signe constant sur $[a;b]$, l'**aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b** est l'aire du domaine :

$\mathcal{D} = \{M(x;y)/\ a \leqslant x \leqslant b\ ; 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ quand f est positive .

$\mathcal{D} = \{M(x;y)/\ a \leqslant x \leqslant b\ ; f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ quand f est négative.



Théorème 1.(admis)

Pour toute fonction **continue par morceaux sur** $[a;b]$, on peut définir **une aire sous la courbe entre** a **et** b.

Démonstration. le travail fait sur la méthode des rectangles nous a permis de démontrer ce résultat dans un cas particulier.

Définition (Aire et intégrale). Soit f une fonction continue par morceaux sur I et $a \leqslant b$ dans I.

1. Si f est **positive** sur I, on appelle intégrale de f entre a et b, l'**aire sous la courbe de $\mathcal{C}_f$ entre a et b**.
2. Si f est **négative** sur I alors l'intégrale de f entre a et b est l'**opposée de l'aire définie ci-dessus**.
3. Si f change de signes sur I alors on découpe l'intervalle I en intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Notation. Cette intégrale se note $\int_a^b f(x)dx$. a et b sont appelées les **bornes** de l'intégrale. La variable x est « muette » c'est à dire que : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

Proposition 2.

1. $f \geqslant 0$ sur $[a;b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$ 2. $f \leqslant 0$ sur $[a;b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$ 3. ⚠Les réciproques sont fausses !

Définition (Cas des bornes inversées). Si $a > b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Exemple 1. ✎ 1. Donner le signe de $M = \displaystyle\int_0^2 \frac{x-8}{x^3+1}dx$. 2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^3 \lfloor x \rfloor\, dx$ et $\displaystyle\int_3^{-1} \lfloor x \rfloor\, dx$

3. Soit $f : x \mapsto x - 2$. Calculer : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)dx$ $J = \displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ et $K = \displaystyle\int_0^4 f(x)dx$.

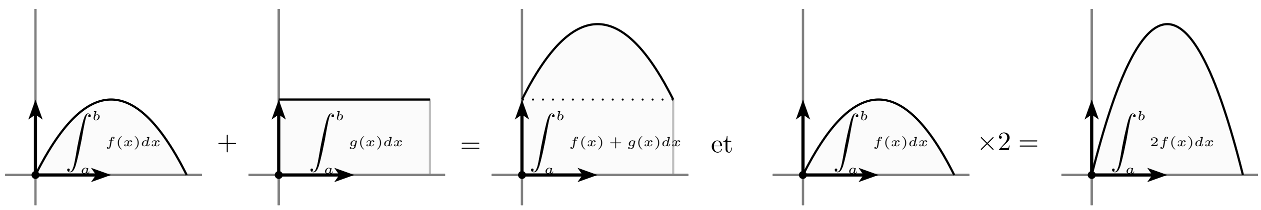
II. Propriétés de l'intégrale

Proposition 3.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I a, b et c trois réels de I et α un réel quelconque.

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
2. *Relation de Chasles.* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$
3. *Linéarité de l'intégrale.* $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
4. *Conservation de l'ordre.* ♡ Si $f \leqslant g$ sur $[a; b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$ ⚠on a donc $a \leqslant b$
5. *Inégalité de la moyenne.* ♡ Si $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a; b]$ alors $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^a f(x)dx \leqslant M(b-a)$ ⚠on a donc $a \leqslant b$

Illustration pour la linéarité :



Proposition 4. Intégrale et valeur absolue

Soit f continue par morceaux sur $[a; b]$. Alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant (b-a) \max_{x\in[a;b]} |f(x)|$ ⚠on a donc $a \leqslant b$

Théorème 5. Intégrale nulle

Soit f continue par morceaux et **de signe constant** sur $[a; b]$. Alors, si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, f **est nulle** sur $[a; b]$.

Exemple 2.

1. Soit $\displaystyle u_n = \int_n^{n+1} e^{-x}dx$. Déterminer par encadrement la limite de la suite (u_n).
2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{du}{u^2+1}$.
   (a) Justifier que F est bien définie et calculer $F(0)$.
   (b) Déterminer le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de signes de F sur $\mathbb{R}$.

III. Primitives d'une fonction

1. Définition. Lien entre deux primitives

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive de** f sur I toute fonction F **dérivable** sur I telle que : $F' = f$ sur I.

Exemple 3. ✎ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$. Donner deux primitives distinctes de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6.

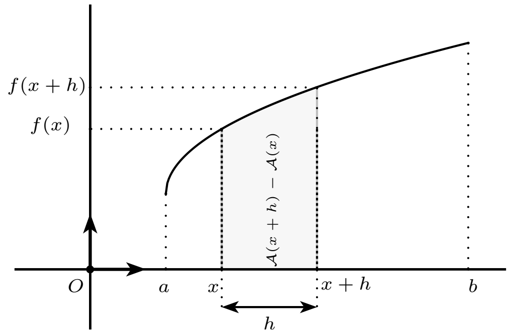
♡ Soient F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I. Alors F et G diffèrent d'une constante. Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + c$ pour tout $x \in I$

2. Lien entre primitive et intégrale

Théorème 7. Fondamental de l'intégration

♡ Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$. La fonction définie sur I par

$\mathcal{A} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(u)\mathrm{d}u$ est l'**unique primitive de f s'annulant en a**.



Remarque . On peut donc exprimer une primitive de toute fonction continue sur I, au minimum à l'aide du symbole intégrale. Pour certaines fonctions, c'est le seul moyen. Ainsi, on ne pourra noter autrement que $x \mapsto \displaystyle\int_a^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$ les primitives de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Théorème 8.

♡ Soit f une fonction continue sur un intervalle I a et b deux nombres de I, alors :
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, où F est **une primitive quelconque** de f sur I.

IV. Techniques de calcul des primitives

Dans cette partie, on ne se préoccupe pas des questions liées aux ensembles de définition.

1. Vérifier que F est une primitive de f

Méthode.

On dérive la fonction F donnée et on vérifie que $F' = f$.

Exemple 4. ✎ Vérifier :

1. que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{2}{x^3}$ et que $x \mapsto (x^2+1)^4$ est une primitive de $x \mapsto 8x(x^2+1)^3$.
2. que $x \mapsto \ln(2x+1)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{2}{2x+1}$, que $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive de $x \mapsto xe^{x^2}$ et que $x \mapsto -\ln(1+e^{-x})$ est une primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.
3. que $x \mapsto f(-x)$ est une primitive de $x \mapsto -f'(-x)$ et que $f(2x+1)$ est une primitive de $2f'(2x+1)$.

2. Primitives des dérivées usuelles

Méthode.

Pour déterminer une primitive d'une telle fonction, il suffit de connaître ses formules de dérivation et d'aller dans le sens contraire. On peut toujours ajouter une constante arbitraire si l'énoncé ne précise pas de quelle primitive on a besoin. C'est notamment le cas si on veut calculer une intégrale, comme le stipule le théorème 6.

Exemple 5. ✎ Donner une primitive de : 1. $x \mapsto 0$ 2. $x \mapsto 1$ 3. $x \mapsto 2x$ 4. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ 5. $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$

3. Utiliser la linéarité pour déterminer une primitive

Méthode.

Les formules de dérivation sont « naturelles » pour les opérations suivantes : somme/différence, multiplication/division **par une constante**. Par conséquent, il est aisé de déterminer une primitive de la somme/différence de deux dérivées usuelles et/ou du produit/du quotient d'une dérivée usuelle **par une constante**. Dans le dernier cas de figure, on raisonne par proportionnalité.

Exemple 6. ✎ Donner une primitive de : 1. $x \mapsto \mathrm{e}^x - 2x$ 2. $x \mapsto x$ 3. $x \mapsto \dfrac{x}{5}$ 4. $x \mapsto 5x^2$ 5. $x \mapsto \dfrac{9}{x^2}$

Remarque . ⚠Ne jamais oublier, lorsque cherche une primitive, que les formules de dérivées d'un produit ou d'un quotient ne sont pas « naturelles »et qu'il n'y a aucune raison qu'elles le deviennent dans le sens contraire.

4. Primitives et composées

Méthode.

On rappelle que, pour a, b et α réels :

1. $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$ $(\alpha \neq 0)$ 2. $\ln'(u) = \dfrac{u'}{u}$ 3. $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$ 4. $f : x \mapsto u(ax+b) \Longrightarrow f'(x) = au(ax+b)$.

Les cas particuliers précédents de dérivée d'une composée permettent fréquemment de déterminer des primitives. Il faut parfois combiner cette méthode avec les raisonnements par proportionnalité vus précédemment. Retenir que cette méthode est à tester **en priorité** dès qu'on à affaire à **un produit ou un quotient de fonctions** (hors constantes).

Exemple 7. ✎ Donner une primitive de :

1. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5}$ 2. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^{3x}+5)^2}$ 3. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ 4. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ 5. $x \mapsto x(x^2+1)^4$

V. Techniques de calculs d'intégrales

1. Calcul par recherche de primitive « à vue »

Méthode.

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, on cherche une primitive F de f à l'aide des méthodes vues dans la section précedente, puis on calcule $F(b) - F(a)$.

Exemple 8. ✎ Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(3t^2 + t + 1\right) dt$, $I_2 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{du}{u}$ et $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^{-\mathrm{e}} \frac{du}{u}$.

2. Intégration par parties

Parfois, il est trop difficile de trouver une primitive « à vue ». La méthode d'intégration par partie est basée sur la dérivée d'un produit. Elle ne permet pas de calculer directement une intégrale mais de plutôt de remplacer un calcul d'intégrale compliqué par un calcul d'intégrale plus simple (par exemple pour lequel on pourra trouver une primitive « à vue »).

Théorème 9.

Soient u et v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration. Utiliser la linéarité de l'intégrale et la dérivée d'un produit.

Méthode.

On utilise l'intégration par parties pour calculer une intégrale de la forme : $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ et quand le calcul de $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ est plus facile.
Afin de bien choisir laquelle fonction sera u' (dont on devra donc trouver une primitive et laquelle sera v (qu'on sera donc amené à dériver), voici deux principes à retenir.
Si une des deux fonctions est une exponentielle, on la choisit souvent comme u' car elle est facile à intégrer.
Si une des deux fonctions est un logarithme, on la choisit souvent comme v car sa dérivée ne contient plus de logarithme.

Exemple 9. ✎ 1. Calculer $I_1 = \int_0^1 (2t-1)\mathrm{e}^t dt$, $I_2 = \int_0^1 t^2 e^t dt$, $I_3 = \int_1^e (u \ln u) du$, , $I_4 = \int_{-1}^1 y^3 e^{y^2} dy$ et $I_5 = \int_1^x ln(t)dt$

3. Changement de variable

Théorème 10.Changement de variable

Soit f continue sur $[a;b]$ et u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$ telle que $u([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$. Alors, $\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$

Méthode.

Visualisons sur un exemple.

1. Posons $x = u(t)$. *Par exemple, posons* $x = t^2$ *pour calculer* $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{2t}{3t^2+1} dt$
2. Le dt est modifié de la manière suivante : $dx = u'(t)dt$. *Dans notre exemple* $dx = 2tdt$
3. Modifier les bornes de l'intervalle en leur appliquant u. *Ce qui donne* $\int_{1^2}^{2^2} \cdots$
4. Remplacer $u'(t)dt$ par dx (ou bien dt par $\frac{x}{u'(t)}$) puis $u(t)$ par x. *On obtient ici* $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{3x+1}$

Effectuer un changement de variable permet parfois de simplifier l'expression, et ainsi de trouver une primitive *un peu trop cachée*, et souvent aussi de faire apparaître des propriétés *sympathiques* de l'intégrale étudiée.

Exemple 10. ✎ 1. Effectuer $y = 3x+1$ dans le résultat de l'intégrale précédente.

2. Effectuer $x = e^t$ dans l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{-t}} dt$ puis calculer I.

3. Soit f continue sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer à l'aide d'un changement de variable que : $\forall a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_{-a}^0 f(t)d = \int_0^a f(-t)dt$

(b) Déduire que si f est paire : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

(c) Si f est impaire, calculer de même $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt$. (d) Interpréter graphiquement les deux résultats précédents.

VI. Sommes de Riemann et méthode des rectangles

On rappelle un résultat démontré en TP, dans le cas particulier d'une fonction croissante et positive.

Théorème 11.

Si f est $\mathcal{C}^0$ sur $[a;b]$, on pose $S_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ et $S'_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$

Les sommes de Riemann $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$ et $(S'_n(f))_{n\geqslant 1}$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$

En plus de son utilité principale, permettre calculer des valeurs approchée d'intégrales trop difficiles, ce théorème permet parfois de calculer certaines limites :

Exemple 11. ✎ Calculer les limites des sommes suivantes : $\dfrac{1}{n^4}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^3$, $\dfrac{1}{n^{p+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^p$, $\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-1+\frac{2k}{n}}$

VII. Intégrale impropre en $\pm\infty$.

1. Définitions

Définition. Si f est continue ou continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est impropre en $+\infty$.
Elle converge si $\displaystyle\int_a^{A} f(t)\,dt$ a une limite finie quand $A\to+\infty$
On note alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(t)\,dt=\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$. (Elle diverge sinon.)
De même en $-\infty$.

Exemple 12. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ (impropre en $+\infty$) converge et calculer sa valeur.

Réponse $\displaystyle\int_0^{A} e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^A=-e^{-A}+1\to 1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et vaut 1.

Exemple 13. ✎ Intégrales de Riemann. Montrer que si $\alpha>1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ converge et diverge si $\alpha\leqslant 1$.

2. Opérations

Le plus simple est de revenir à l'intégrale partielle pour laquelle il n'y a pas de problème de convergence. Sinon, il faut d'abord prouver la convergence de chaque morceau avant d'opérer.

1. Relation de Chasles : Si $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt=\int_a^{b} f(t)\,dt+\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$
2. Linéarité : Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ convergent alors
$\displaystyle\int_a^{+\infty}\alpha f(t)+\beta g(t)\,dt=\alpha\int_a^{+\infty} f(t)\,dt+\beta\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$
3. Positivité : Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ convergent et que $f(t)\leqslant g(t)$ sur $[a,+\infty[$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt\leqslant\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$
4. Intégrale fonction des bornes : Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ converge alors $G(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ est dérivable là où f est continue et $G'(x)=f(x)$
5. Intégration par parties et changement de variables : on revient à l'intégrale partielle.

Exemple 14. ✎ Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$

3. Comparaison pour les fonctions positives

Théorème 12.

Si f et g sont positives et que $f \leqslant g$ sur $[a, +\infty[$ (ou que $f = o(g)$) alors si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge "par minoration de fonctions positives".
si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge "par majoration de fonctions positives".

Démonstration. Si f est positive alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ est croissante, en revenant à la définition du sens de variation.
Si $x \leqslant y$ alors $F(y) = F(x) + \displaystyle\int_x^y f(t)\, dt$ qui est positive par positivité de l'intégration.. Donc $F(x) \leqslant F(y)$
Il n'y a alors que deux possibilités : F a une limite finie en $+\infty$ ou F tend vers $+\infty$. Donc si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge c'est que $\displaystyle\int_a^x f \to +\infty$.

Références : Intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.

Exponentielles : $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\alpha x} dx$ converge si $\alpha < 0$ et diverge si $\alpha \geqslant 0$

Exemple 15. Prouver la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + e^{-x}}{x^4 + x} dx$ impropre en $+\infty$.

Réponse On a, pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{x^2+e^{-x}}{x^4+x} \leqslant \frac{x^2+x^2}{x^4} = \frac{2}{x^2}$ dont l'intégrale converge en $+\infty$.

Donc, par comparaison de fonctions positives , $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + e^{-x}}{x^4 + x} dx$ converge également.

Définition. si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(dx)|\, dx$ converge on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge absolument.

Théorème 13.

si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge absolument alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Ce théorème permet d'appliquer les critères de comparaison précédents à des fonctions au signe changeant.