Chapitre 15 : Lois à densité usuelles

I. Introduction

Dans ce chapitre, on étudie trois lois usuelles (qui reviennent souvent dans les exercices) pour des variables aléatoires à densité. Les résultats pourront ensuite être réutilisés sans démonstration dans les exercices.

Pour **chaque loi usuelle**, il faudra connaître **par cœur** la notation (et ses paramètres éventuels), l'univers image $X(\Omega)$, une fonction densité (et éventuellement la fonction de répartition), l'espérance, le ou les cas typiques d'utilisation.

En revanche, **pour toutes les autres** variables aléatoires à densité, les résultats exposés dans ce chapitre sont inutiles.

II. Loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$

Théorème 1.(et définition)

X suit une **loi uniforme sur** $[a;b]$ lorsqu'elle admet pour densité la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On a $X(\Omega) = [a;b]$, X admet une espérance et $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Démonstration. ✎ Utiliser le plan classique vu au chapitre précédent.

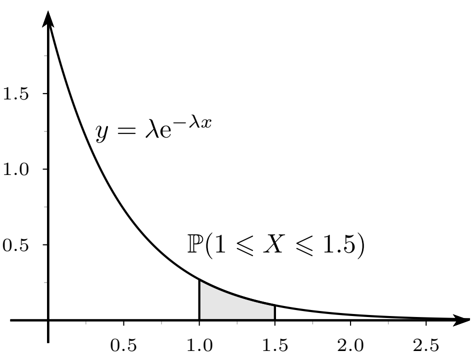
Exemple 1.

1. Donner la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$ et calculer, pour $\alpha < \beta$ deux réels de $[a;b]$, la probabilité $\mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$.
2. Soit X le temps d'attente (en minutes) à un arrêt de bus , on suppose que X suit la loi uniforme uniforme sur $[0;15]$. Quelle est la probabilité d'attendre entre 7 et 12 minutes ?
3. On veut modéliser la durée de vie sans panne d'un type de téléviseur par une loi uniforme X sur $[0;T]$. On sait que 16% de ces téléviseurs tombe en panne au cours de la première année.
   Calculer la valeur de T qui doit être prise, puis l'espérance de vie d'un tel téléviseur.
4. Alice et Bob décident de se retrouver au café entre 7h et 8h. Les instants d'arrivée d'Alice et Bob sont assimilés à des variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$ Chacun attend un quart d'heure mais jamais au-delà de 8h. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ? (on pourra se contenter d'une approche graphique)

III. Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Théorème 2.(et définition)

X suit une **loi exponentielle de paramètre** $\lambda > 0$ lorsqu'elle admet pour densité la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \in [0;+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
On a $X(\Omega) = [0;+\infty[$, X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.



Démonstration. ✎ Utiliser le plan classique vu au chapitre précédent.

Exemple 2.
1. Donner la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et calculer, pour $\alpha < \beta$ deux réels de $[0;+\infty[$, la probabilité $\mathbb{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
2. On souhaite à présent modéliser la durée de vie X du téléviseur par une loi exponentielle de paramètre λ.
   (a) Calculer la valeur de λ cohérente avec le pourcentage de panne la première année.
   (b) Calculer les durées de vie moyenne et médiane de ce type de téléviseur.
   (c) Calculer $P(X \geqslant 2)$ et $P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 5)$. Que remarquez-vous ? Comment l'interpréter ?

Théorème 3.(et définition)

♡ Soit X une variable aléatoire à densité d'univers image $[0;+\infty[$ et tel que $\mathbb{P}(X > x) > 0$ pour tout $x > 0$
On dit que X suit une **loi de durée de vie sans vieillissement** ou qu'elle **possède la propriété d'absence de mémoire** lorsque $\mathbb{P}_{(X\geqslant t)}(X \geqslant t+h) = \mathbb{P}(X \geqslant h)$, pour tout $(t,h) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

X suit une loi de durée de vie sans vieillissement si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Démonstration. reprendre le dernier point de l'exemple précédent dans un cas général.

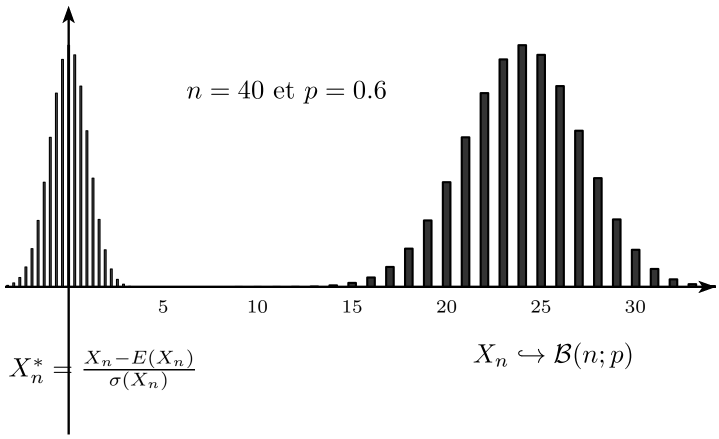
IV. Lois normales $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

1. Des lois binomiales vers les lois normales

Le résultat qui suit est au programme de TES et permet d'introduire la loi normale via la loi binomiale. L'intérêt est de comprendre pourquoi la loi normale est si naturelle (notamment car la loi binomiale l'est) . En revanche, il n'est pas nécessaire d'avoir tout cela en tête dès qu'on utilise la loi normale.

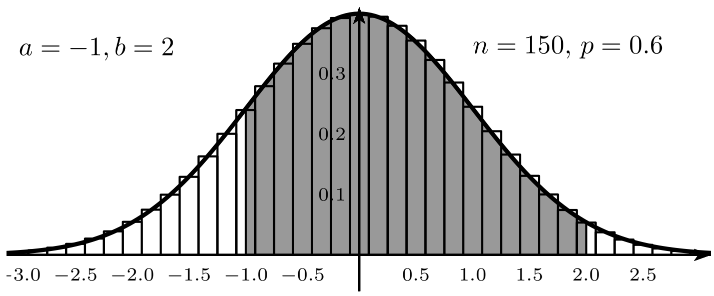
Proposition 4.Moivre-Laplace

Pour $n \in \mathbb{N}^*, p \in]0;1[$, si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$, alors $X_n^* = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est centrée réduite.
Soient a et b deux réels, $a < b$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leqslant X_n^* \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$, où X suit une loi appelée **loi normale centrée réduite**



Théorème 5.(et définition)

X suit une loi appelée **loi normale centrée réduite** notée $\mathcal{N}(0;1)$ lorsqu'elle admet comme densité la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$, X admet une espérance (et une variance) et $E(X) = 0$ (et $V(X) = 1$).
On note très souvent Φ sa fonction de répartition. On a la propriété suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.



Démonstration. ✎ On peut tout démontrer, sauf que l'intégrale de f_X sur $\mathbb{R}$ vaut 1 (mais on démontre tout de même sa convergence).

Remarque . La différence fondamentale avec les deux exemples précédents est qu'on ne dispose pas de primitive usuelle de la fonction densité et qu'on ne peut donc pas expliciter la fonction de répartition. Dans la pratique, on se sert donc soit de la notation intégrale ou d'une table de valeurs approchées (disponible à la fin du polycopié) pour donner les probabilités d'une variables aléatoires qui suivent une loi normale.

Comme l'espérance vaut 0 et que la variance vaut 1 (et donc l'écart type aussi), c'est bien une loi centrée réduite.

Exemple 3. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

1. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant \frac{3}{2})$, $\mathbb{P}(X \geqslant \frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(X \leqslant -1)$ et $\mathbb{P}(-2 \leqslant X \leqslant 2)$, $\mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 2)$ à l'aide de la table disponible à la fin du polycopié.
2. Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = 2\mathbb{P}(X \leqslant x) - 1$
3. Soit $\alpha \in]0;1[$. Démontrer qu'il existe un unique réel positif u_α tel que $\mathbb{P}(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.
   A l'aide de la table, calculer $u_{0.05}$ et $u_{0.01}$ à 10^{-2} près.

Théorème 6.(et définition)

On dit que X suit la loi normale de paramètres μ et σ^2, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ si elle admet pour densité la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$ $X(\Omega) = \mathbb{R}$, X admet une espérance (et une variance) $E(X) = \mu$ (et $V(X) = \sigma^2$).
Par conséquent, si $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$, on a $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Remarque . Le dernier point du théorème précédent donne la méthode pour calculer des probabilités de lois normales à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite.

Exemple 4.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
   (a) A l'aide de la table, calculer, à 10^{-2} près les valeurs de $\mathbb{P}(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma)$, $\mathbb{P}(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma)$ et $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma)$, où $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu; \sigma^2\right)$.
   (b) Démontrer que le maximum de f_X est $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, atteint en $x = \mu$ et que les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_{f_X}$ sont $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.
   (c) Tracer schématiquement les courbes pour les paramètre suivants : $(0;1)$, $(2;1)$, $(0;\frac{1}{2})$, $(0;\frac{3}{2})$.
2. On suppose que la variable aléatoire X associant à une vache d'un cheptel sa production laitière annuelle suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ avec $\mu = 6000$ et $\sigma = 400$.
   (a) Quelle est la probabilité qu'une vache prélevée au hasard produise annuellement : i. entre 5900 et 6100 litres ? ii. moins de 5500 litres de lait ? iii. plus de 6250 litres ?
   (b) Donner un intervalle centré sur μ qui contient la production annuelle de lait d'une vache de ce cheptel avec une probabilité de 0.95.
   (c) Quel niveau de production annuelle de lait une vache prise au hasard dans le cheptel dépassera-t-elle avec une probabilité égale à 0.2 ?
3. On souhaite modéliser la durée de vie d'un appareil par une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$. Déterminer μ et σ d'après les deux spécifications suivantes : 80% des appareils ont une durée de vie entre 120 et 200 jours et 5% de la production a une durée de vie inférieure à 120 jours.

Table de calcul de Φ

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	$\boxed{0.06}$	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
$\boxed{1.5}$	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	$\boxed{0.9406}$	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

On a, par exemple $\mathbb{P}(X \leqslant 1,56) = \Phi(1,56) \approx 0,9406$ (voir les nombres encadrés).

Pour les valeurs négatives, on se sert de la propriété de symétrie du théorème 5.