Chapitre 16 : espaces vectoriels et applications linéaires

I. Introduction

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. L'intérêt de ce concept est de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Le nom provient de l'ensemble le plus simple à visualiser, celui des vecteurs du plan.

Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir, le rétrécir ou le faire changer de sens si ce réel est négatif). Dans tous les cas, le résultat de ces opérations sera encore un vecteur du plan.

De la même manière peut aussi additionner deux fonctions continues sur un intervalle I, ou la multiplier par un réel et cela restera une fonction continue sur un intervalle I. Même chose avec les polynômes, les matrices, les suites...

Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux fonctions, aux polynômes, ... La contrepartie de cette généralisation est une inévitable apparition de l'abstraction.

II. Espaces vectoriels

Définition. Un ensemble E est appelé un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$ espace vectoriel) si

1. E est muni d'une addition, notée $+$, qui vérifie les propriétés suivantes :
   (a) $\forall (x;y) \in E^2$, on a $x+y \in E$ (*on reste dans l'ensemble E lorsqu'on effectue une addition*).
   (b) $\forall (x;y) \in E^2, x+y=y+x$ (*l'addition est commutative*)
   (c) $\forall (x;y;z) \in E^3, (x+y)+z=x+(y+z)$ (*l'addition est associative*)
   (d) il existe un **élément neutre** 0_E dans E qui vérifie : $\forall x \in E, x+0_E=0_E+x=x$
   (e) $\forall x \in E, \exists y \in E, x+y=y+x=0_E$. On note alors $y=-x$ (*pour chaque élément de E, il existe un opposé*)
2. E est muni d'une multiplication par un réel, notée ., qui vérifie :
   (a) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x;y) \in E^2, \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot x$ (*distributivité 1*)
   (c) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (*distributivité 2*)
   (d) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$ (*pseudo associativité*)

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés les **vecteurs**.

Remarque .
1. Les vecteurs sont souvent notés x, avec une flèche, mais parfois simplement x, sans flèche, comme dans la définition précédente, afin d'alléger au maximum les notations.
2. L'élément neutre peut être noté 0 plutôt que 0_E, toujours pour alléger la notation, mais il ne faut alors pas le confondre avec le nombre 0.
3. Cette définition, très abstraite et très longue n'est pas à connaître par coeur. Il faut en retenir la chose suivante : un espace vectoriel est un ensemble qui est stable par + et . (ce sont les premières propriétés des deux points de la définition). De plus, les opérations + et . possèdent les propriétés qui vous semblent naturelles.
   Le contraire peut paraître étrange mais on pourrait définir des additions qui ne vérifie pas ces propriétés et, a priori, rien ne dit dans cette définition que l'addition est celle que vous avez l'habitude d'utiliser.

Exemple 1. ✎ Parmi les ensembles suivants, lesquels vous semblent être des espaces vectoriels ? 1. $\mathbb{N}$ 2. les réels compris entre 0 et 1. 3. les fonctions continues sur l'intervalle $[0;1]$. 4. $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Remarque . Vous n'aurez jamais à démontrer directement qu'un ensemble est un espace vectoriel. Nous allons admettre le théorème suivant qui vous laisse entrevoir le vaste champ d'application des espaces vectoriels.

Cette année, nous nous intéresserons surtout au cas de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (qu'on peut identifier à $\mathbb{R}^n$). Pour $n = 2$ (vecteurs du plan) ou $n = 3$ (vecteurs de l'espace), la représentation graphique permettra de rendre les choses moins abstraites. Pour $n \geqslant 4$, il faut faire preuve d'un peut plus de qualité d'abstraction.

Théorème 1.admis

Les ensembles suivants, munis des opérations + et . classiques, sont des espaces vectoriels :
- ⋆ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes ($n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*$).
- ⋆ $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes réels.
- ⋆ l'ensemble des suites réelles.
- ⋆ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 2. ✎ Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soient $P(X) = -X^2 + 1$ et $Q(X) = 2X^2 - X + 3$. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer, en précisant les espaces vectoriels auxquels les vecteurs concernés appartiennent : u, $2u - 3v + 5 \cdot 0_{3,1}$, $2(w + x) - 3x$, $\lambda w + \mu x$, $\frac{1}{2}(3y + z) - y$.
2. Expliciter le polynôme $2P(X) - 3Q(X)$ et comparer le résultat à un des calculs précédents.
3. Expliciter la matrice $\frac{1}{2}(3A + B) - A$ et comparer le résultat à un des calculs précédents.

Définition. Soit E un espace vectoriel. On appelle **combinaison linéaire** d'une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E tout vecteur x de E de la forme $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$, où $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Méthode.

Pour vérifier que x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$:
1. on peut en trouver une, par chance, de tête ou grâce à une astuce,.
2. sinon (ou bien si on veut trouver toutes les combinaisons linéaires possibles), on procède par identification pour trouver les λ_i et on résout le système correspondant.

Attention, il est possible de ne pas en trouver !

Exemple 3. ✎ Si possible, écrire
1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme combinaisons linéaires de la famille $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme combinaisons linéaires de la famille $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme combinaisons linéaires de la famille $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme combinaisons linéaires de la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5. Écrire $2X^2 + 3X - 1$ comme combinaison linéaire de la famille $(1; X; X^2)$
6. Écrire $2X^2 + 3X - 1$ comme combinaison linéaire de la famille $(1; X + 1; X^2 + X + 1)$

Comme on vient de le voir dans l'exemple précédent, certaines familles sont particulièrement pratiques pour écrire des combinaisons linéaires.

Définition. On appelle **base canonique** :

- ⋆ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ la famille $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ la famille $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
- ⋆ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la famille $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ (elle est donc constituée de n vecteurs)
- ⋆ de $\mathbb{R}[X]$ la famille $1, X, X^2, X^3, \dots, X^n, \dots$ (c'est donc une famille infinie !)

Proposition 2.

Tout vecteur **s'écrit de manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique.

Exemple 4. ✎ Décomposer dans la base canonique : $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $2X^2+3X-1$ et $(X+1)^2$.

III. Sous-espaces vectoriels

Jusqu'à présent nous n'avons utilisé que très peu d'espaces vectoriels. Mais en fait, chacun d'entre eux en contient de nombreux autres, les **sous-espaces vectoriels**. Pour vous, la seule manière de démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel sera de démontrer qu'il est un sous espace vectoriel d'une espace vectoriel connu.

L'avantage est le suivant : si on sait qu'un ensemble **non vide** est inclus dans un espace vectoriel, toutes les propriétés relatives aux opérations + et . sont automatiquement vérifiées. Seules **les deux propriétés de stabilités** seront donc à démontrer.

Méthode. et définition

Soit E un espace vectoriel. Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :

1. on montre que $F \subset E$ (la plus part du temps c'est évident)
2. on montre que $0 \in F$, ce qui justifie que F est non vide.
3. on écrit « Soient $(x,y) \in F^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. »Puis :
   - ⋆ soit on montre séparément que $x+y \in F$ et $\lambda \cdot x \in F$
   - ⋆ soit on montre directement que $\lambda \cdot x + y \in F$

Exemple 5. ✎

1. Montrer que les ensemble suivants sont des sev d'un ev à préciser (x, y, zsont des réels).
   $E = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x+y=0\right\}$, $F = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, x-2y+3z=0\right\}$, $G = \left\{\begin{pmatrix}2x\\-x\end{pmatrix}\right\}$
   $H = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x-y=0\right\}$, $I = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, x+y=0 \text{ et } z=y\right\}$
2. Pourquoi les ensembles suivants ne sont-ils pas des e.v. ? $E=\emptyset$, $F = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x+y=1\right\}$, $G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x \geqslant 0\right\}$
3. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel, que $\mathbb{R}_3[X]$ aussi. L'ensemble des polynômes de degré 3 en est-il un ?

Dans certains cas, il est encore plus simple de justifier qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Définition. Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On appelle $Vect(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(u_1, \dots, u_n)$.

$Vect(u_1, \dots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$

Théorème 3.

$Vect(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $(u_1, \dots, u_n)$.

Remarque . C'est le plus petit sev (au sens de l'inclusion) qui contienne tous les vecteurs de la famille.

Le théorème suivant est à connaître, mais il faut savoir le redémontrer sur des exemples.

Théorème 4.

L'ensemble des solutions d'un système homogène linéaire à n équations est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Méthode.

Pour montrer qu'un ensemble de solutions d'un système linéaire homogène est un s-e-v :

1. Résoudre le système linéaire.
2. Exprimer l'ensemble des solutions comme un espace vectoriel engendré.
3. Conclure.

Exemple 6. ✎

1. Ecrire E, F, G, H et I comme des s-e-v engendrés par une famille de vecteur.
2. Justifier que les ensembles suivants sont des s-e-v et les écrire comme des sev engendrés par une famille de vecteur.
$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{array} \right. \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ -2x - 3y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right. \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \left\{ 3x + y - z = 0 \right. \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \\ -2y - 5z + 3t = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{array} \right. \right\}$
3. Montrer, de deux manières, que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer de même que $\{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = P(1)\}$ en est un.

IV. Bases d'un espace vectoriel

Définition. Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une base d'un espace vectoriel E si tout vecteur de E **s'écrit de manière unique** comme combinaison linéaire de $(u_1, \dots, u_p)$. On dit alors que E est de **dimension** p. Les bases canoniques sont des bases particulières.

Exemple 7. ✎ Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$? de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$? de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$? de $\mathbb{R}_2[X]$? de $\mathbb{R}_n[X]$? de $\mathbb{R}[X]$?

Méthode.

Montrer qu'une famille est une base d'un ev (sur un exemple).
Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrons que (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $X = xe_1 + ye_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} x \cdot 1 + y \cdot 0 = a \\ x \cdot 0 + y \cdot 1 = b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array} \right.$
X s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire de (e_1, e_2) par $X = xe_1 + ye_2$. Donc (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 8. ✎ Les familles suivantes sont-elles des bases ?

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ 4. $(X - 1, X + 1, X^2)$

V. Applications linéaires

Exemple 9. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe $M \cdot X$. Calculer $f(0)$, $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$, $af(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + bf(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $f(2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$.

Définition. Soient E et F des espaces vectoriels.
Une application $f : E \mapsto F$ est une **application linéaire** si $\forall (x,y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$ et si $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

Proposition 5.

Si f est une application linéaire de E dans F :
1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$
3. $f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$

Exemple 10.
1. L'application nulle $0 : \left\{ \begin{array}{l} E \mapsto F \\ x \mapsto 0_F \end{array} \right.$ est une application linéaire.
2. L'application identité $Id : \left\{ \begin{array}{l} E \mapsto F \\ x \mapsto x \end{array} \right.$ est une application linéaire.

Méthode.
Pour montrer qu'une application $f : E \mapsto F$ est linéaire :
1. Montrer que E et F sont des espaces vectoriels (si ce n'est pas déjà su).
2. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$
3. Montrer que : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

On peut aussi montrer directement à la place des points 2 et 3 que :
$\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$

Exemple 11. ✎ Montrer que les applications suivantes sont linéaires.
$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (-x+y+z)$, $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y-x \end{pmatrix}$, $h : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$,
Montrer que l'application dérivée $D : P \mapsto P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 6.

Une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est linéaire si et seulement si il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $f : X \mapsto M \cdot X$.
M est alors appelée matrice de f dans les bases canoniques.

Exemple 12. ✎ Montrer à l'aide du théorème précédent que les applications f, g, h de l'exercice précédent sont linéaires.

Définition.
1. On appelle **noyau** d'une application linéaire $f : E \mapsto F$ et on note $Ker(f)$ l'ensemble $Ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0\}$
2. On appelle **image** d'une application linéaire $f : E \mapsto F$ et on note $Im(f)$ l'ensemble $Im(f) = \{f(x), x \in E\}$

Théorème 7.

$Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, et $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Méthode.

1. Pour déterminer le noyau d'une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de matrice M dans les bases canoniques, on résout le système $MX = 0$.
2. Pour déterminer l'image d'une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de matrice M dans les bases canoniques on détermine les valeurs de Y pour lesquelles $MX = Y$ a au moins une solution.

Exemple 13.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$ est un s-e-v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Proposer une base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
3. Montrer que $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis écrire le vecteur $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ dans cette base.
4. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice fixée, l'application $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image lorsque $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$