Chapitre 2 : Logique, sommes et produits

Sommaire

I. Éléments de logique

1. Quantificateurs

Notation. ⋆ Le signe "$\forall$" placé devant une variable x signifie "quel que soit x".

⋆ Le signe "$\exists$" placé devant une variable x signifie "il existe x ".

⋆ Le signe "$\exists!$" placé devant une variable x signifie "il existe un, et un seul, x".

Exemples.
1. La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$ se lit "quel que soit x appartenant à $\mathbb{R}$, x^2+1 est strictement positif.
2. La proposition $\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2=4$ se lit il existe x appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $x^2=4$.
3. La proposition $\exists! x \in \mathbb{R}$, $x^2-2x+1=0$ se lit il existe un,et un seul, x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $x^2-2x+1=0$.

2. Proposition-Assertion

Définition. On appelle proposition ou assertion toute phrase $\mathcal{P}$significative susceptible d'être vraie ou fausse.

Remarque . Lorsqu'une proposition $\mathcal{P}$ dépend des valeurs prises par un paramètre x (resp. par plusieurs paramètres $x,\ y,\ \cdots$) on note souvent celle-ci $\mathcal{P}(x)$ (resp. $\mathcal{P}(x,\ y,\ \cdots)$ pour le souligner.

Exemples.
1. La proroposition $\mathcal{P}\ :\sqrt{2}>1$ est une proposition vraie.
2. La proroposition $\mathcal{P}\ :\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+1\leqslant 0$ est fausse.

Exercice 1. *Pour quelles valeurs réelles de x les propositions suivantes sont-elles vraies ?*
1. $\sqrt{x^2}=x$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
3. $\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$.

3. Négation

Définition. On appelle négation de $\mathcal{P}$, l'assertion notée *non*$(\mathcal{P})$ définie comme étant vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et inversement.

Propriété.
1. La négation de $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ est $\exists x,\ non(\mathcal{P}(x))$.
2. La négation de $\exists x,\ \mathcal{P}(x)$ est $\forall x,\ non(\mathcal{P}(x))$.

Exemple 1. La négation de $\mathcal{P}:\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}, x^2+1\leqslant M$ est *non*$(\mathcal{P}):\ \forall M\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R}, x^2+1>M$.

Exercice 2. *La proposition $\mathcal{P}$ ci-dessus est-elle vraie ?*

II. Raisonnements

1. Le contre-exemple

Méthode. *Contre-exemple*

Pour montrer qu'une assertion est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.

Exemple 2. ✎ Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est *paire* si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(-x)$.

Montrer que $f:x\mapsto x+1$ n'est pas paire.

2. Prouver une implication directement

Méthode. *Prouver une implication directement*

L'implication « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ » se traduit par « $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ » ou « si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie aussi ». On dit que « $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$ ». Pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie. Pour que $\mathcal{P}$ soit vraie, il faut que $\mathcal{Q}$ soit vraie.
Une manière de démontrer l'implication est de commencer par l'hypothèse « supposons que $\mathcal{P}$ est vraie », et au terme d'un raisonnement déductif, obtenir « alors $\mathcal{Q}$ est vraie ».

Remarque . ⚠ Si $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ on n'a pas forcément $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$. L'implication $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ est appelée l'*implication réciproque* de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

Exemple 3. ✎ Prouver que si une fonction $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ est décroissante, alors elle est majorée. Que dire de la réciproque ?

3. Prouver une implication avec sa contraposée

Méthode. *Prouver une implication avec sa contraposée*

L'implication *contraposée* de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est $\text{non}(\mathcal{Q}) \implies \text{non}(\mathcal{P})$.
Pour prouver une implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, on peut supposer que $\mathcal{Q}$ est fausse et en déduire $\mathcal{P}$ est fausse.

Exemple 4. ✎ prouver par contraposition, « $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ impair $\implies n$ impair ».

4. Utiliser une implication

Méthode. *Utiliser une implication*

⚠ $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ ne signifie pas que $\mathcal{Q}$ est vraie ! (ni $\mathcal{P}$, d'ailleurs). Il s'agit d'une relation de causalité, précisément, si $\mathcal{P}$ est vraie alors $\mathcal{Q}$ est vraie.
Pour utiliser une implication (qui peut-être donnée dans un énoncé, ou un résultat du cours), on procède de la manière suivante :

1. « $\mathcal{P}$ est vraie » (on ne peut l'affirmer qu'après l'avoir prouvé)
2. « or $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie » (résultat du cours ou démontré avant)
3. « donc $\mathcal{Q}$ est vraie »

Exemple 5. ✎ Prouver que $h : [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est majorée.

5. Raisonnement par double implication

Définition. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ est équivalente à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire. *Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si et seulement si $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{Q}$, ou encore que pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie.*

Méthode. *Prouver une équivalence par double implication*

Pour prouver une équivalence, on peut prouver séparément les deux implications.

Exemple 6. ✎ Prouver que « $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ impair $\iff n$ impair ».

6. Raisonnement par disjonction des cas

Méthode. *Disjonction des cas*

Pour prouver une assertion, on peut travailler sur une famille exhaustive de cas.

Exemple 7. ✎ Prouver que pour tout entier naturel n, $n(n+1)$ est pair.

7. Raisonnement par l'absurde

Méthode. *Raisonnement par l'absurde*

Pour prouver $\mathcal{P}$, il suffit de prouver que « non($\mathcal{P}$) $\implies \mathcal{Q}$ » où $\mathcal{Q}$ est une assertion fausse (On aboutit à une contradiction).

Exemple 8. Montrons par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

On suppose que $\sqrt{2}$ est le quotient de deux entiers p et q sans facteurs communs : $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. On a alors $p = q\sqrt{2}$, donc, en élevant au carré : $p^2 = 2q^2$. Ainsi, p est pair donc $p = 2r$ pour un certain entier r. D'où $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$ donc $q^2 = 2r^2$: q est aussi pair, d'où p et q ont 2 comme facteur commun, ce qui est contradictoire. On a prouvé par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

8. Raisonnement par récurrence

a. Récurrence simple

Proposition 1.Principe de Récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

- ⋆ Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (initialisation)
- ⋆ et si pour tout entier $n \geqslant n_0,\ \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ (hérédité).

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

On admet cette proposition qui reprend le principe des dominos. Si on fait tomber le premier domino et que, dès qu'un domino tombe il entraîne le suivant dans sa chute, alors tous les dominos vont tomber.

En langage mathématique, cela donne : imaginons avoir démontré $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ pour tout $n \geqslant 0$.

On a $\mathcal{P}(0) \xRightarrow{\text{hérédité},n=0} \mathcal{P}(1)$, or $\mathcal{P}(0)$ est vraie (initialisation), donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On a $\mathcal{P}(1) \xRightarrow{\text{hérédité},n=1} \mathcal{P}(2)$, or $\mathcal{P}(1)$ est vraie (étape précédente), donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

On a $\mathcal{P}(2) \xRightarrow{\text{hérédité},n=2} \mathcal{P}(3)$, or $\mathcal{P}(2)$ est vraie (étape précédente), donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie...

Méthode. *Rédiger une récurrence*

En pratique :

1. on énonce clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$ à prouver.
2. initialisation : on démontre l'assertion $\mathcal{P}(n_0)$
3. hérédité : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour *un* entier $n \geqslant n_0$, et on déduit de cette hypothèse la propriété au rang $n+1$: $\mathcal{P}(n+1)$.
4. conclusion : on conclut que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple 9. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^n \geqslant n+1$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: $2^n \geqslant n+1$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $2^0 = 1 \geqslant 0 + 1 = 1$

Héridité : supposns que propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier fixé n, c'est à dire, $2^n \geqslant n+1$ (c'est l'hypothèse de récurrence), montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$. En effet,

$$\begin{aligned} 2^n \geqslant n+1 \quad & \Rightarrow 2 \times 2^n \geqslant 2(n+1) \\ & \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant 2n+2 \\ & \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant (n+1+1)+n \\ & \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant (n+1+1) \text{ puisque } n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On en conclu que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n+1$$

□

b. Récurrence double

Proposition 2.

La démonstration par récurrence double (ou d'ordre 2) consiste à :

1. Vérifier que la propriété est vraie pour les deux premiers rangs n_0 et n_0+1.
2. Vérifier que si $n \geqslant n_0$ est un entier quelconque tel que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$ alors elle est vraie au rang $n+2$. Autrement dit, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$

Alors la propriété est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Exemple 10. ✎ On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n \geqslant 0$.

c. Récurrence forte

Proposition 3.

La démonstration par récurrence forte consiste à :

1. Vérifier que la propriété est vraie pour le premier rang n_0
2. Vérifier que si $n \geqslant n_0$ est un entier quelconque tel que la propriété est vraie jusqu'au rang n (c'est-à-dire que la propriété est vraie pour tout $k \in [\![n_0\,;n]\!]$), alors elle est vraie au rang $n+1$. Autrement dit, $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \mathcal{P}(n_0+2), \cdots,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Alors la propriété est vraie pour tout n.

Exemple 11. ✎ On pose $u_1 = 3$ et pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$.

1. calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 3n$.

III. Sommes de nombres réels

1. Somme simple

Notation. Si $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leqslant n$, on note $[\![m\,;n]\!]$ l'ensemble des nombres entiers compris entre m et n.

Exemple 12. $[\![2\,;4]\!] = \{2;\ 3;\ 4\}$.

Notation. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$ et $a_p, ..., a_n$ sont des nombres réels. La somme $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$ se note $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$, $\displaystyle\sum_{p \leqslant k \leqslant n} a_k$ ou encore $\displaystyle\sum_{k \in [\![p;n]\!]} a_k$.

Remarque . La lettre « k » est l'*indice* de la somme. Elle est dite muette, car on peut la remplacer par n'importe quelle lettre (non utilisée auparavant).

Exemple 13. ✎

1. Écrire avec des pointillés les sommes : $A = \displaystyle\sum_{k=2}^{50} k^2$, $\quad B = \displaystyle\sum_{p \in [\![1;9]\!]} \mathrm{e}^{\sqrt{p}}$, $\quad C = \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant 100} \frac{\ln j}{j+1}$.
2. Écrire avec le symbole Σ :

$$D = \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(42),\ \ E = 2 + 4 + 6 + \ldots 50,\ \ F = \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+3} + \cdots + \frac{3\,000}{3\,000 + 3\,001}$$

Remarque . Si p et n sont deux nombres entiers naturel tels que $p \leqslant n$

1. la somme $\sum_{k=p}^{n} a_k$ contient $n-p+1$ termes.
2. $\sum_{k=p}^{p} a_k = a_p$
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$.

Exemple 14. ✎ Donner le nombre de termes de chacune des sommes A, B, C, D, E et F.

On peut montrer par récurrence les propriétés suivantes :

Proposition 4.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![0\,;n]\!]$, et $a_0, \ldots, \cdots,\ a_n, b_0, \ldots, b_n$ des nombres. Alors :

1. **associativité** : $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$, en particulier $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k$.
2. **linéarité** : $\lambda \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k$ et $\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$.
3. **inégalité triangulaire** : $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|$

Proposition 5.Sommes usuelles

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. **Sommes des premières puissances des n premiers entiers naturels non nuls :**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   (a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
   (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. **Somme géométrique (avec $q \in \mathbb{R}^*$) :**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 \text{ si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \end{cases}$$

Démonstration. ✎ *1a, 1b et 1c : récurrence, 2 : calculer* $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$. □

Changement d'indice

Lorsque l'indice de sommation est entier, il est fréquent de réécrire une somme en opérant sur cet indice. La manipulation est valable tant que les termes sur lesquels portent la somme sont inchangés.

Exemple 15. $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1}$. Les deux sommes sont identiques car correspondent toutes les deux à la somme étendue

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Ceci correspond à un changement d'indice : $j = k + 1$.

Exercice 3. *Ecrire* $\sum_{k=0}^{n} a_k$ *avec un changement d'indice* $j = k + 3$.

Remarque . Avec un peu d'aisance, on peut même directement écrire

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$$

. On peut aussi écrire

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$$

qui se comprend comme une sommation à rebours.

⚠ *Lors de changement d'indice, il faut faire attention à rester dans un cadre où les indices manipulés restent entiers. Ainsi*

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k \neq \sum_{p=1}^{n} a_{2p}$$

.

car la première somme comporte le double de terme de la seconde !

Sommes télescopiques

Exercice 4. *En effectuant un changement d'indice, démontrer la proposition suivante :*

Proposition 6.

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$ et $a_p, ..., a_{n+1}$ sont des nombres réels. On a :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$$

.

Exemple 16. ✎ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

2. Somme double

Définition. Si l'ensemble d'indexation décrivant une somme apparaît comme étant constitué de couples, on dit que cette somme est une somme double.

Exemple 17.

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 3 \leqslant j \leqslant 4}} a_{i,\ j} = a_{1,\ 3} + a_{1,\ 4} + a_{2,\ 3} + a_{2,\ 4}$$

qui peut s'écrire aussi

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\3\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,\ j} = a_{1,\ 3} + a_{2,\ 3} + a_{1,\ 4} + a_{2,\ 4}.$$

La première égalité de cet exemple s'écrit

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\3\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,\ j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant 2}\left(\sum_{3\leqslant j\leqslant 4} a_{i,\ j}\right).$$

et la seconde

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\3\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,\ j} = \sum_{3\leqslant j\leqslant 4}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant 2} a_{i,\ j}\right).$$

Pus généralement on a :

Proposition 7.

Soient deux entiers m et n tels que $m \geqslant n$. On a :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,\ j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant m}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,\ j}\right) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant m} a_{i,\ j}\right).$$

Notation. Si $m = n$, la somme $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,\ j}$ est souvent notée $\sum_{1\leqslant i,\ j\leqslant n} a_{i,\ j}$.

Exemple 18. On a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} ij\right)\\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} i\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} j\right) \text{ (on factorise par } i)\\
&= \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} i\right)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} j\right) \text{ (on factorise par } \sum_{1\leqslant j\leqslant n} j)\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Plus généralement

Proposition 8.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, a_n$ des nombres réels. On a :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant m} a_i\right)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} b_j\right)$$

Exemple 19. ✎ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels. Montrer que

$$\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i\right)^2 = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} a_i a_j.$$

IV. Produit

1. Produit de nombres réels

Notation. Soient les nombres $a_0, ..., a_n$.

Le produit $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$ se note $\prod_{k=0}^{n} a_k$, $\prod_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k$ ou encore $\prod_{k \in [\![1;n]\!]} a_k$.

Proposition 9.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$, $b_1 \cdots, b_n$ des nombres réels.

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\prod_{k=1}^{n} a = a^n$.
2. $\forall m \in [\![1\,;n]\!]$, $\prod_{k=1}^{n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{m} a_k\right)\left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right)$.
3. $\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$.
4. Si aucun des b_k n'est nul, on a $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}$.

Exemple 20. ✎ Calculer le produit $\prod_{i=0}^{n} \frac{i+1}{i+2}$

2. Factorielle et coefficients binomiaux

Définition. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre *factorielle* n par la formule :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Par convention, on pose aussi $0! = 1$.

Exemple 21. ✎ Calculer $n!$ pour $n \in [\![0\,;6]\!]$. Simplifier $\frac{(n+2)!}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition. Pour tous entiers naturels n et p, on définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$, qui représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n, par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } n \geqslant p \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

On utilise parfois la notation $C_n^p = \binom{n}{p}$.

Exemple 22. ✎ soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n}$. Soit $p \in [\![0\,;n]\!]$, montrer que $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

Proposition 10.Triangle de Pascal

Soient deux entiers naturels $p < n$. Alors : $\displaystyle\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$.

Démonstration. ✎ *Partir du membre de droite et réduire au même dénominateur.* ☐

Exemple 23. ✎ Montrer par récurrence qu'il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir p objets parmi n.

Exemple 24. ✎ Coefficients binomiaux pour $0 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$:

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	**2**	**1**				
3	1	3	**3**	1			
4							
5							
6							

on utilise la proposition 10 :

$$\begin{array}{ccc} \dbinom{n}{p} & + & \dbinom{n}{p+1} \\ & & \| \\ & & \dbinom{n+1}{p+1} \end{array}$$

Proposition 11. Binôme de Newton

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$.

Démonstration. ✎ *Procéder par récurrence sur n.* ☐

Exemple 25. Soit x réel, développer : $(1+x)^4$. Calculer, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.