Chapitre 3 : Matrices

Sommaire

I. Notion de matrice et vocabulaire

Notation. Dans tout le chapitre n, p, q sont des entiers naturels non nuls.

Définition. Une matrice A à n lignes et p colonnes est un tableau défini par np éléments de $\mathbb{R}$ notés a_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ avec $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!],\ a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Le nombre a_{ij} est le *coefficient* d'indice (i,j) de la matrice A.

La matrice A est parfois dite de *taille* ou de *format* (n,p) ou tout simplement *matrice* $n \times p$.

L'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Notation. On présente généralement les matrices de cette manière :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & j\text{-ème colonne} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ i\text{-ème ligne} \rightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \end{array}$$

Exemple 1. ✎

1. À quels ensembles appartiennent les matrices suivantes ?
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{e} \\ \pi & \sqrt{2} & 0{,}2 \end{pmatrix}$
   (c) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (d) $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   (e) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
   (f) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (g) $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (h) $F = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$
2. Écrire sous forme de tableau la matrice $M = (i-j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 4}}$.

Définition. On adopte le vocabulaire suivant :

1. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices carrées* de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
2. $\mathcal{M}_{1p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices lignes* de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$.
3. $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices colonnes* de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
4. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice triangulaire supérieure* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i > j \implies a_{ij} = 0$.
5. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice triangulaire inférieure* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i < j \implies a_{ij} = 0$.
6. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice diagonale* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i \neq j \implies a_{ij} = 0$.
   On note parfois $(a_{ij}) = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

7. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice symétrique* si $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ji} = a_{ij}$.
8. $0_{np} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ est la *matrice nulle*, dont tous les coefficients valent 0. On la note aussi 0.
9. $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la *matrice identité* : diagonale, de taille n, dont les coefficients diagonaux valent 1.

Exemple 2. ✎ Pour $n = 3$, donner des exemples de matrices triangulaire supérieure (resp. inférieure), diagonale et symétrique.

II. Opérations de base sur les matrices

1. Addition de matrices et multiplication d'un réel par une matrice

Définition. On définit les opérations suivantes sur l'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$:
Addition : $\forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}),\ A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.
Multiplication par un réel : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}),\ \lambda\, A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.

Exemple 3. ✎ À partir des matrices de l'exemple 1, calculer $E + D$, $3B$ et $A - 3I_3$.

Remarque . ⚠ Il est possible d'additionner deux matrices uniquement lorsqu'elles ont les mêmes dimensions.

2. Multiplication matricielle

Définition. On définit le produit d'une matrice A de n lignes et p colonnes avec une matrice B de p lignes et q colonnes comme la matrice de n lignes et q colonnes suivante :

$$\forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{kj})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R}),\ AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{R}).$$

⚠ On ne peut calculer le produit AB que si le nombre de colones de A égale le nombre de lignes de B.

Remarque . En particulier le produit d'une matrice ligne $\ell = (\ell_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ et d'une matrice colonne $c = (c_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est un nombre, égal à $\ell_1 c_1 + \cdots + \ell_n c_n$.
Le coefficient (i,j) du produit AB est le produit de la i-ème ligne de A avec la j-ème colonne de B.
On peut disposer les calculs ainsi :

$0 \otimes 2 + 3 \otimes 1 + 1 \otimes 2$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&2\\3&1\\0&2\end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\1&1&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2\\9&5\\4&9\end{pmatrix} = AB \end{array}$$

Exemple 4. ✎ À partir des matrices de l'exemple 1, calculer les produits :
1. ED 2. DE 3. AI_3 4. AC 5. $0_{2,3}A$ 6. EB 7. Que dire de BE ?

Proposition 1. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT

Le produit matriciel ...

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (AB)C = A(BC)$.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A(B+C) = AB + AC$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A+B)C = AC + BC$.
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
5. vérifie $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AI_n = A$ et $I_n A = A$.

Démonstration. Se vérifie avec la définition. Les premiers produits de l'exemple 4 justifient les derniers points.

Exemple 5. ✎ Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M^2 - 3M + 2I_2 = 0_{2,2}$ puis factoriser l'expression de gauche dans l'égalité précédente.

III. Puissances de matrice

Définition. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit A une matrice **carrée** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle puissance k-ième de A, et on note A^k, la matrice $A \times \cdots \times A$ (k fois).
Par convention $A^0 = I_n$.

Comme le produit matriciel ne commute pas en général, la puissance de matrice garde seulement certaines propriétés des réels :

Proposition 2.

Soient $(k, l, n) \in \mathbb{N}^2$ et $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_p(R)^2\right)$.

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$
3. ⚠Lorsque A et B commutent, on a :
   (a) $(AB)^k = A^k B^k$
   (b) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$
   (c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
   (d) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
   (e) $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$

Remarque . Deux exemples fondamentaux de matrices qui commutent.

⋆ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: A et λI_n commutent.
⋆ Pour toute matrice carrée A : toutes les puissances de A commutent entre elles.

Exemple 6. ✎ Calculer, si possible :

1. A^2 **pour** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. A^2, A^3 , B^2, AB, BA, $A+B$, $(A+B)^2$, $A^2 + 2AB + B^2$ **pour** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
3. M^0, M^1, M^2, M^3, M^4, M^{100} **pour** $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque . Une application importante du calcul de puissances de matrices est l'étude des suites récurrentes (notamment les suites récurrentes couplées qui interviennent en probabilités).

IV. Inverse d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On appelle *matrice inverse* de A et on note $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie
$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$
L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ qui admettent une inverse est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
1. A^{-1} est unique : si $BA = I_n$ ou $AB = I_n$ alors $B = A^{-1}$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. ⚠$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemple 7. ✎
1. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $A^2 - A = I_n$ alors A est inversible, et préciser son inverse.
3. Soit $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que λI_n est inversible, d'inverse $\frac{1}{\lambda} I_n$ et que 0_n n'est pas inversible.

Remarque . Pour des matrices inversibles, les propriétés de calcul des puissances sont valables pour des puissances négatives.

Remarque . ⚠ La somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible en général. Par exemple I_n et $-I_n$ sont inversibles mais $I_n - I_n = 0_n$ ne l'est pas.

Exemple 8.
1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et préciser son inverse.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$. Simplifier $(P^{-1}AP)^2$, $(P^{-1}AP)^3$.
   Conjecturer une formule pour $(P^{-1}AP)^n$ valable pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la prouver par récurrence. Est-elle encore valable pour $n = 0$?
   Si de plus A est inversible, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, (P^{-1}AP)^n$ est inversible et préciser son inverse.
   Déduire que la formule démontrée est encore vraie pour les entiers négatifs.

En calcul matriciel, lorsqu'une matrice est inversible cela permet d'obtenir de nouvelles règles de calcul. On peut "simplifier" par cette matrice dans les égalités, comme on le fait dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la divisions. Cependant il ne faut pas oublier de tenir compte de la non commutativité des matrices.

Pour ne pas faire d'erreur, il faut multiplier, à gauche ou à droite, par l'inverse de la matrice. En conséquence :

Proposition 4.

Soit $C \in Gl_n(\mathbb{R})$, et A et B des matrices telles que les produits suivants aient un sens.

Simplification à gauche :
$$CA = B \iff A = C^{-1}B$$
$$CA = CB \iff A = B$$

Simplification à droite :
$$AC = B \iff A = BC^{-1}$$
$$AC = BC \iff A = B$$

Exemple 9.
1. Soient A, B telles que $AB = 0$. Montrer que si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors ni A ni B ne sont inversibles.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

Proposition 5.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c, d sont quatre nombres réels. Alors,
1. Si $ad - bc = 0$, A n'est pas inversible.
2. Si $ad - bc \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration. ✎ 1 Considérer $B = \begin{pmatrix} d & d \\ -c & -c \end{pmatrix}$. 2 Calcul direct

Remarque . Le calcul explicite de l'inverse d'une matrice carrée de petite dimension (3×3, voire plus rarement 4×4), qui repose essentiellement sur une séries de manipulations techniques, sera vu dans le chapitre consacré à la résolution de systèmes linéaires. Ceci signifie qu'une bonne partie des exercices sur les matrices n'est pas encore faisable.

V. Transposition et matrices symétriques

Définition. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. La *transposée* de A est la matrice ${}^t\!A = (a'_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ où :

$$\forall (i, j) \in [\![1\,; p]\!] \times [\![1\,; n]\!],\ a'_{ij} = a_{ji}$$

La transposition est une opération qui échange les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exemple 10. ✎ Calculer la transposée de chacune des matrices de l'exemple 1.

Proposition 6. Propriétés de la transposition

On a :
1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad {}^{tt}\!A = A$.
2. ⚠$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad {}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad {}^t(\lambda A + B) = \lambda\,{}^t\!A + {}^t\!B$.
4. $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad {}^t(A^{-1}) = ({}^t\!A)^{-1}$.
5. L'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ A = {}^t\!A\}$ est l'ensemble des *matrices symétriques* d'ordre n (parfois noté $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$).

Démonstration. À partir de la définition V □

Exemple 11. ✎ Vérifier la deuxième formule sur les matrices B et E de l'exemple 1.

VI. Applications

1. Application des matrices aux systèmes linéaires

Proposition 7.

Un système linéaire à n équations et n inconnues : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$

peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre n,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Si la matrice A est inversible, alors le système admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Exemple 12. Soit le système $\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors le système peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix}$ on en déduit que

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi, l'unique solution du système $x = -4$; $y = -3$ et $z = 1$.

a. Résolution de systèmes linéaires à l'aide de la matrice augmentée

La méthode de base pour résoudre un système d'équations linéaires est de remplacer le système par un autre, plus simple, ayant le même ensemble de solutions.

Ceci se fait par une succession d'opérations, appelées opérations élémentaires :

- ⋆ multiplier une équation par un réel non nul ;
- ⋆ permuter deux équations ;
- ⋆ ajouter un multiple d'une équation à une autre équation.

Soit un système linéaire à n équations et n inconnues : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$

La matrice augmentée associée au système est la matrice $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right)$

Les opérations élémentaires appliquées à un système d'équations linéaires correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée. Ces opérations sont les suivantes :

- ⋆ multiplier une ligne par un réel non nul ;
- ⋆ permuter deux lignes ;
- ⋆ ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.

EXEMPLE

Utilisons les opérations élémentaires pour résoudre le système $\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$.

La matrice augmentée associée au système est la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

1. Obtenir 0 à la place du terme $a_{2,1}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 1.
   Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,1}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 1.
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -14 \\ 0 & -9 & -2 & 25 \end{array}\right)$$
2. Obtenir 1 à la place du terme $a_{2,2}$
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right] \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & -9 & -2 & 25 \end{array}\right)$$
3. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 2.
   Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 2.
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 9L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$
4. Obtenir 1 à la place du terme $a_{3,3}$
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right] \qquad L_3 \leftarrow -5L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
5. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 3.
   Obtenir 0 à la place du terme $a_{2,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 3.
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{8}{5}L_3 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Cette matrice augmentée correspond au système

$$\begin{cases} x & & & = -4 \\ & y & & = -3 \\ & & z & = 1 \end{cases}$$

On obtient l'unique solution du système $x = -4$; $y = -3$ et $z = 1$.

b. Déterminer l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour déterminer l'inverse, si elle existe, de la matrice A on applique la méthode précédente à la matrice augmentée $(A|I_n)$.

Si la matrice A est inversible, à l'aide des opérations élémentaires on transforme la matrice augmentée $(A|I_n)$ pour obtenir la matrice $\left(I_n|A^{-1}\right)$

Exemple 13. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$. La matrice augmentée est la matrice

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. Permuter, s'il le faut, la première ligne avec une autre, pour que l'élément de la première ligne et de la première colonne soit non nul.

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Obtenir 1 à la place du terme $a_{1,1}$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,1}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 1.

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

4. Obtenir 1 à la place du terme $a_{2,2}$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

5. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 2.
   Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 2.

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

6. Obtenir 1 à la place du terme $a_{3,3}$

$$\begin{array}{r} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

7. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 3.
   Obtenir 0 à la place du terme $a_{2,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 3.

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Ainsi, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 9 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.