Chapitre 4 : Ensembles et applications

Sommaire

1. Ensembles de base

Les théories mathématiques contiennent nécessairement des concepts que l'on ne peut définir, et sur lesquels se fondent les *définitions* et *propositions* de la théorie. On peut notamment citer les *ensembles* (qui sont intuitivement une collection d'objets ou d'*éléments*) et la relation d'appartenance à un ensemble que l'on note $\in$. La notation $x \in E$ signifie que x est un élément de l'ensemble E, ou encore que x appartient à E.

Notation. Pour décrire un ensemble, on peut :

- ⋆ donner la liste de ses éléments, entre accolades : $E = \{0; \mathrm{e}; -3\}$
- ⋆ le définir comme la partie d'un ensemble dotée d'une propriété : $S = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2\}$

Notation. On peut notamment construire :

1. l'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, qui ne contient aucun élément.
2. l'ensemble des nombres entiers naturels, noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
3. l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$
4. les intervalles de nombres entiers $[\![3\,;7]\!] = \{3; 4; 5; 6; 7\}$
5. l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (quotients de nombres relatifs)
6. l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et les irrationnels comme $\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}, \dots$
7. les intervalles : $]3\,;7] = \{x \in \mathbb{R},\ 3 < x \leqslant 7\}$, $[3\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ 3 \leqslant x\}, \dots$

⚠ on ne confondra pas $\{0; 1\}$ (qui ne contient que 0 et 1) et l'intervalle $[0\,;1]$ (qui contient tous les réels compris entre 0 et 1).

Notation. Si $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles ci-dessus, on note $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
De même, on note $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty\,;0]$, $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[\dots$

> **Définition**. 1. Un ensemble E qui possède un nombre fini d'éléments est appelé un ensemble *fini*. Le nombre d'élements de E est appelé le cardinal de E et noté $\mathrm{card}(E)$ ou $|E|$.
> 2. Si à chaque élément d'un ensemble E, on peut faire correspondre un unique entier et réciproquement, on dit que E est un ensemble *dénombrable* (un tel ensemble a donc un nombre infini d'éléments).
> 3. Les ensembles qui ne sont pas dans les deux premières catégories sont des ensembles *non dénombrables*.

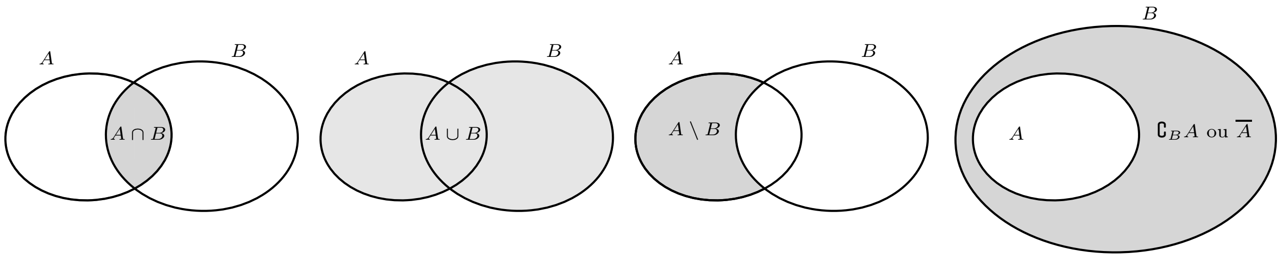
Exemple 1. $\mathbb{N}$ (par définition), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, en revanche, $\mathbb{R}$ ou même $[0; 1]$ sont non dénombrables.

> **Définition**. Étant donnés deux ensembles A et B, le produit cartésien $A \times B$ de A est de B est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in A$ et $y \in B$.
>
> On peut définir de même des produits cartésiens contenant davantage de facteurs.
>
> Si $B = A$ on note $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$, ...

Exemple 2. ✎ A quoi peuvent être associés les éléments de $\mathbb{R}^2$?

2. Opérations sur les ensembles

> **Définition**. Soient A et B deux ensembles.
> 1. Lorsque $x \in A \implies x \in B$, on dit que A est *inclus* dans B, ce que l'on note $A \subset B$.
> 2. L'intersection de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$.
> 3. La réunion de A et B est l'ensemble défini par $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$.
> 4. L'ensemble A privé de B est défini par $x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B)$ (noté encore $A - B$).
> 5. Si $A \subset B$, le complémentaire de A dans B est $\complement_B A = B \setminus A$. On le notera $\overline{A}$ en probabilité lorsque B correspond à l'univers sur lequel on travaille.



Remarque . On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 3. ✎ Étant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'*ensemble des parties* de E : l'ensemble des ensembles inclus dans E. Décrire $\mathcal{P}([\![1\,;3]\!])$.

Exemple 4. Soit A et B deux sous ensembles de Ω.
Comparer les ensembles suivants $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap A$, $\overline{A} \cup A$, $\emptyset$, Ω.

Remarque . Les règles sur les ensembles établies dans l'exemple précédent restent valables pour des réunions (*resp.* intersections) finies ou dénombrables de sous ensembles de Ω.

Définition (Réunion et intersection finie ou dénombrable d'une famille d'ensembles). Soit E un ensemble et I un ensemble fini ou dénombrable. On considère une famille de sous ensembles de E, notée $(A_i)_{i \in I}$. Alors :

1. On note $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ la réunion des A_i, pour $i \in I$, définie comme l'ensemble des éléments x de E tels qu'il existe au moins un entier $i \in I$ tel que $x \in A_i$.
2. On note $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ l'intersection des A_i, pour $i \in I$, définie comme l'ensemble des élements x de E tels que $x \in A_i$ pour tous les entiers $i \in I$.

Exemple 5. ✎ Soit $\left([1; 1+\frac{1}{n}]\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Donner $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1; 1+\dfrac{1}{n}\right]$ et $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1; 1+\dfrac{1}{n}\right]$

Remarque . Les règles sur les ensembles établies dans l'exemple 4 restent valables pour des réunions (*resp.* intersections) finies ou dénombrables de sous ensembles de Ω.

I. Applications

1. Vocabulaire

Définition 1. Définir une *application* f (ou fonction [(1)]), c'est associer à tout élément x d'un ensemble E un unique élément, noté $f(x)$, d'un ensemble F.

- ⋆ E est appelé l'*ensemble de définition* de f.
- ⋆ F est l'ensemble d'arrivée de f.
- ⋆ pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'*image* de x par l'application f.
- ⋆ soit A un ensemble inclus dans E. On appelle image de A par f, et on note $f(A)$, l'ensemble des images des éléments de A par f : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.
- ⋆ pour tout $y \in F$, les solutions de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x forment l'ensemble des antécédents de y par f. Cet ensemble peut-être vide, ou contenir un, plusieurs, voire une infinité d'éléments.
- ⋆ sur tout ensemble E non vide, on peut définir l'application *identité* par $\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$.

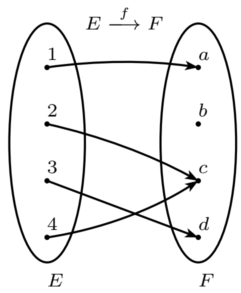
(1). On ne fait pas de différence ici entre une application ou une fonction. Dans certains textes, une fonction associe *au plus* un élément de l'ensemble d'arrivée à tout élément de l'ensemble de départ. L'ensemble de définition peut alors être plus petit que l'ensemble de départ.

Remarque . On définira souvent une fonction par son expression :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

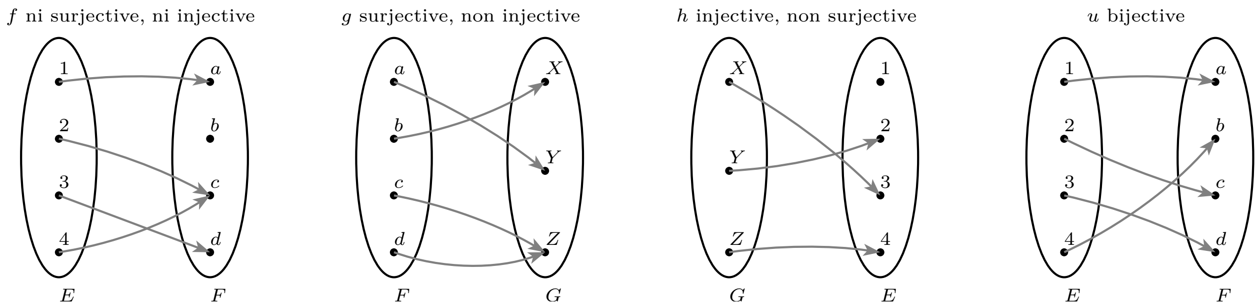
qui signifie que f est définie sur $E = \mathbb{R}$, à valeurs dans $F = \mathbb{R}_+$, et associe (flèche spéciale $\mapsto$) à tout x réel son carré x^2.

Exemple 6. ✎



1. On a schématisé ci-contre la définition d'une fonction f définie sur l'ensemble $E = [\![1\,;4]\!]$ et à valeurs dans $F = \{a; b; c; d\}$
   Donner l'image de 3 par f, l'ensemble des antécédents de c par f et l'ensemble des antécédents de b par f.
2. Définissons $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array} \right.$, $g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$,$h : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right.$,$i : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{array} \right.$
   Déterminer $f(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R}_+^*)$, $h(\mathbb{R})$, $h(\mathbb{R}_+^*)$, $j(\mathbb{R}_+^*)$

Définition. Une application $f : E \to F$ est dite
- ⋆ *surjective*, ssi tout élément de F a *au moins* un antécédent : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
- ⋆ *surjective*, ssi $f(E) = F$.
- ⋆ *injective*, ssi tout élément de F a *au plus* un antécédent : $\forall (x, z) \in E^2, f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$.
- ⋆ *bijective*, ssi tout élément de F a *exactement* un antécédent : f est surjective et injective.

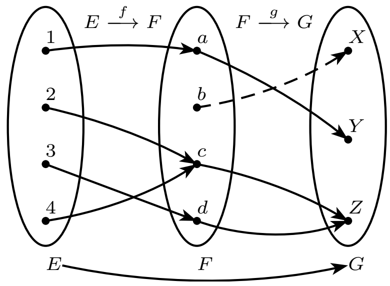


Remarque . Le cas particulier important de l'algèbre linéaire mis à part (qui sera vu plus tard), on commence souvent l'étude par la surjectivité, la résolution de $y = f(x)$ dans la recherche d'antécédent permettant parfois de prouver l'unicité du même coup.

Exemple 7. ✎ les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$ 2. $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x\,;\,y) \mapsto x + y$ 3. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

4. $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$

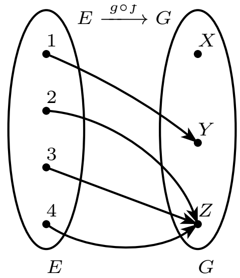


2. Composition

Définition. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La *composée* de g et f est l'application

$$g \circ f : E \to G,\ x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

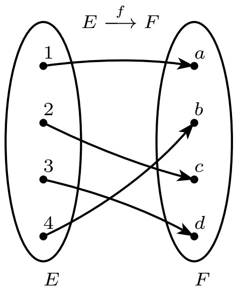
Exemple 8. Dans l'exemple ci-contre, $f(4) = c$ et $g(c) = Z$ donc $g \circ f(4) = g(f(4)) = g(c) = Z$.

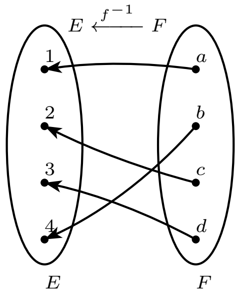


Exemple 9. ✎ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$. Donner une expression de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

⚠ : la composition n'est pas commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

Définition. Dans le cas où $f : E \to F$ est une application bijective, pour tout $y \in F$, on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f. L'*application réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$.
Par définition, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.





Exemple 10. ✎ Expliciter les applications réciproques des bijections de l'exemple 7.