Chapitre 5 : Fonctions usuelles

I. Propriétés des courbes

1. Définition et lecture graphique

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Définition. L'ensemble de définition d'une fonction f, souvent noté $\mathcal{D}_f$ est, sauf mention du contraire, l'ensemble des valeurs réelles x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ est valide. La *courbe* d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points du plan défini par $\mathcal{C}_f = \{\mathbf{M}(x;y)\ ,\ y = f(x)\}$.
L'équation $y = f(x)$ est une *équation cartésienne* de la *courbe* de f.

Exemple 1. Lecture graphique d'image et d'antécédents.

Lecture d'image *Lecture d'antécédent* *Résolution d'inéquation*

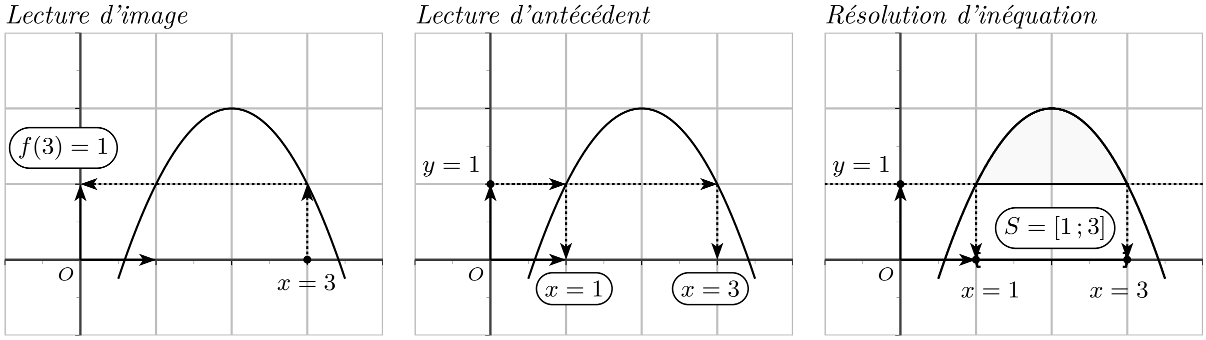
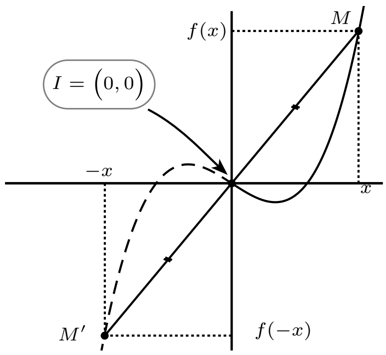


image de 3 par f : $f(3) = 1$. antécédents de 1 par f : 1 et 3. $[1,3]$: ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 1$

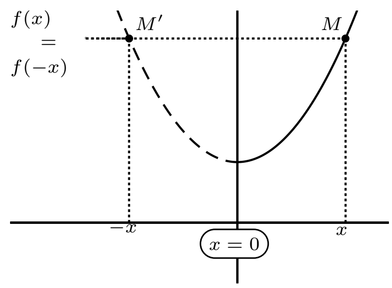
2. Parité et symétrie

L'étude des propriétés d'une fonction permet de restreindre son ensemble d'étude et de compléter sa courbe par symétrie :



Définition. $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est *impaire* si et seulement si :
$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) = -f(-x)$.
La courbe d'une fonction impaire est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple 2. ✎ Vérifier que $i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire



Définition. $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est *paire* si et seulement si :
$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) = f(-x)$.
La courbe d'une fonction paire est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$).

Exemple 3. ✎ Vérifier que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 1$ est paire

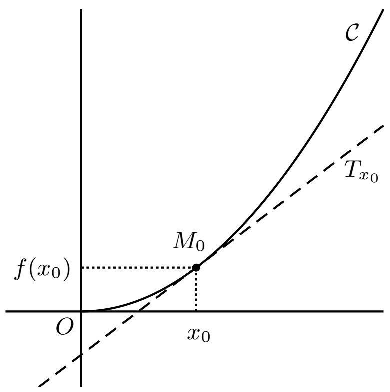
3. Tangentes

La dérivation fera l'objet d'un chapitre ultérieur. Intuitivement, la tangente en un point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ est la droite qui épouse au mieux l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de M. Elle permet de guider le tracé de $\mathcal{C}_f$ près de M.

Définition. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est la droite T_{x_0} d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

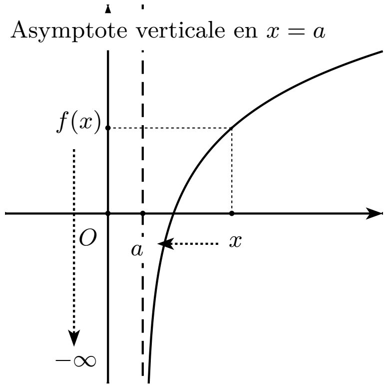
Ainsi, le coefficient directeur de cette tangente est nombre $f'(x_0)$.

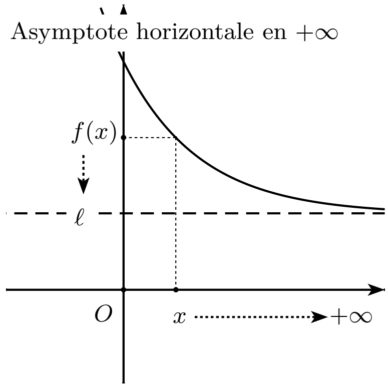


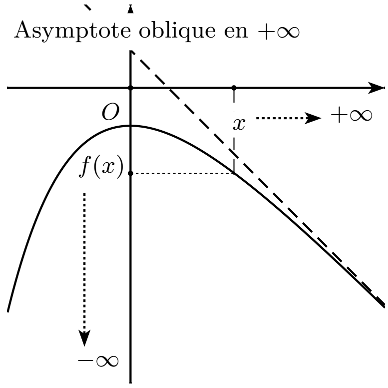
Exemple 4. ✎ Équation de la tangente à $\mathcal{P} : y = x^2$ au point $A(1, 1)$? Équation de la tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ au point d'abscisse 1 ?

4. Asymptotes et notion graphique de limite

Intuitivement, une *asymptote* à la courbe de f au voisinage d'une borne ouverte de son ensemble de définition, est une droite épouse au mieux l'allure de la courbe dans cette direction. Elle permet d'en guider le tracé.







Remarque . La notion de limite, qui sera vu dans un chapitre ultérieur peut être bien envisagée à l'aide de la représentation graphique.

Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ signifie que le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche de 3 que l'on veut, à condition de choisir x suffisamment grand. Cela traduit bien une proximité entre la courbe de f et la droite horizontale d'équation $y = 3$ « loin à droite » sur le graphique.

Par exemple, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$ signifie que le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, à condition de choisir x suffisamment proche du nombre réel 1. Cela traduit bien une proximité entre la courbe de f et la droite verticale d'équation $x = 1$ « loin en haut » sur le graphique.

Définition. La courbe d'une fonction f admet

- ⋆ une *asymptote verticale* d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
- ⋆ une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ $(\in \mathbb{R})$.
- ⋆ une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$ en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ $(\in \mathbb{R})$.

II. Variations d'une fonction et lien avec la dérivation

1. Variations

Définition. Soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$ Alors f est :

- ⋆ *constante sur I* si $\forall\,(x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
- ⋆ *croissante sur I* si $\forall\,(x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- ⋆ *strictement croissante sur I* si $\forall\,(x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- ⋆ *décroissante sur I* si $\forall\,(x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
- ⋆ *strictement décroissante sur I* si $\forall\,(x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Si f est croissante ou décroissante, on dit que f est *monotone sur* I. Si f est strictement croissante ou strictement décroissante, on dit que f est strictement *monotone sur* I.

Méthode. Enchaînements d'inégalités

Partant d'une inégalité de départ valable sur un certain intervalle, on peut appliquer une fonction dont on connait les variations sur cet intervalle afin de déduire une nouvelle inégalité.
Sauf cas évident, il faudra toujours justifier ces étapes en précisant (si besoin en démontrant) les variations de la fonction sur l'intervalle en question.
En résumé : « appliquer une fonction croissante ne change pas le sens de l'inégalité, appliquer une fonction décroissante change le sens de l'inégalité. »
Les cas à connaître parfaitement :

1. **ne change pas** le sens de l'inégalité : ajouter (*resp.* soustraire) le même nombre, multiplier(*resp.* diviser) par un nombre strictement positif, prendre le carré de deux nombres positifs, prendre la racine carrée de deux nombres positifs, appliquer la fonction exponentielle, appliquer la fonction logarithme à deux nombres positifs.
2. **change** le sens de l'inégalité : multiplier(*resp.* diviser) par un nombre strictement négatif, prendre le carré de deux nombres négatifs, prendre l'inverse de deux nombres non nuls de même signe.

Exemple 5. ✎

1. Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(6-3x)^2}$. Encadrer $f(x)$ lorsque $x \in [0;1]$.
2. Montrer que la composée de deux fonctions de même monotonie est croissante et que la composée de deux fonctions de monotonies différentes est décroissante (on ne s'occupera pas des problémes liés aux ensembles de définition)

Remarque . On peut également retenir que la somme de deux fonctions croissantes (*resp.* décroissante) est croissante (*resp.* décroissante) et que le produit d'une fonction croissante par un réel positif (*resp.* négatif) est croissante (*resp.* décroissante). La plupart du temps, on utilise toutefois l'outil de la dérivation, plus calculatoire, pour établir les variations d'une fonction, ce qui évite d'inventer de fausses régles et permet surtout de traiter des cas beaucoup plus compliqués.

2. Opérations et dérivation

On montrera lors du chapitre sur la dérivation :

Proposition 1.

Soient I et J deux intervalles, et u et v deux fonctions. Si

1. $k \in \mathbb{R}$ et u est dérivable sur I, alors $k\,u$ aussi et $(k\,u)' = k\,u'$
2. u et v sont dérivables sur I, alors $u+v$ aussi et $(u+v)' = u'+v'$
3. u et v sont dérivables sur I, alors uv aussi et $(uv)' = u'v + v'u$
4. u et v sont dérivables sur I, et v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
5. $u : I \to J$ dérivable et v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \cdot v' \circ u$.

Exemple 6. ✎ Dériver les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{x+1}{3}$ 2. $x \mapsto (2x+3)\,\mathrm{e}^x$ 3. $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ 4. $x \mapsto x\ln(x)$.

3. Application aux variations

On admet le théorème suivant :

Théorème 2.

Soit f une fonction définie et continue sur un *intervalle* I. Si

- $\star$ f' est nulle sur l'intervalle I, alors f est constante sur I.
- $\star$ $f' > 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement croissante sur I.
- $\star$ $f' < 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque . Les deux derniers points restent vrais si $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs de x, comme par exemple la fonction cube.

⚠Attention, il est nécessaire de considérer un intervalle pour appliquer le théorème précédent, sinon il peut être faux, comme par exemple pour la fonction inverse sur son ensemble de définition.

III. Fonctions rationnelles

1. Rappel sur les puissances

Définition. Soit $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $n \geqslant 2$ un entier.

On pose : $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ et $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Dans l'écriture a^n, n est l'*exposant*.

Proposition 3.

Pour tous réels a et b, non nuls lorsque mis au dénominateur d'une fraction.
1. $a^n a^m = a^{n+m}$ 2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 3. $(a^n)^m = a^{nm}$ 4. $a^n \times b^n = (ab)^n$ 5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

⚠ Si $a, b \neq 0$ et $n \geqslant 2$, $(a+b)^n \neq a^n + b^n$. On a en revanche les identités remarquables :

Proposition 4.

Pour tous réels a et b, et tout entier naturel n,

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 2. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 3. $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

2. Fonctions polynomiales

Définition. Les fonctions *constantes* sont de la forme $x \mapsto c$ où $c \in \mathbb{R}$ fixé.

Les fonctions *monômes* sont des puissances entières de l'identité : $x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions *polynomiales* sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Le plus grand exposant n des différents monômes est le *degré* du polynôme.

Proposition 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = nx^{n-1}$.
2. si n est pair, f est une fonction paire, et si n est impair, f est une fonction impaire.
3. Si u est dérivable sur $\mathcal{D}_u$ alors, $\forall x \in \mathcal{D}_u\ \ (u^n)'(x) = nu'(x)\,(u(x))^{n-1}$.
4. Variations et signe :

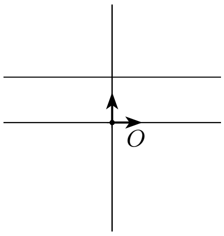
Cas pair : $n \in \mathbb{N}^*$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{2n}	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
x^{2n}		$+$	0	$+$	

Cas impair : $n \in \mathbb{N}$

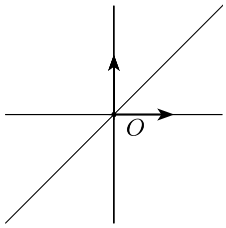
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{2n+1}	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
x^{2n+1}		$-$	0	$+$	

Constante $x \mapsto a$



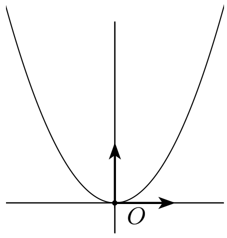
- ⋆ Paire.
- ⋆ Droite horizontale.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 0$.

Identité $x \mapsto x$



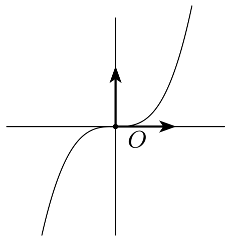
- ⋆ Impaire.
- ⋆ Droite linéaire.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 1$.

Carré $x \mapsto x^2$



- ⋆ Paire.
- ⋆ Parabole.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 2x$.

Cube $x \mapsto x^3$



- ⋆ Impaire.
- ⋆ Pas de nom.
- ⋆ Dérivée : $x \mapsto 3x^2$.

Exemple 7. ✎ Dériver les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{x^2}{2} + x$ et $g : x \mapsto \left(3x^2 + 2x\right)^5$

3. Fonctions affines (polynômes de degré 1 ou 0)

Définition. Une *fonction affine* est une fonction de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont fixés. Le nombre a est le *coefficient directeur* (ou encor la*pente*) de f, le nombre b son *ordonnée à l'origine*.

Proposition 6.

- ⋆ La courbe représentative d'une fonction affine est une *droite affine* d'équation $y = ax + b$.
- ⋆ Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- ⋆ Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

⋆ Si $a > 0$,

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

⋆ si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

Méthode. Obtenir l'équation réduite d'une droite connaissant deux points A et B.
On calcule le coefficient directeur via la formule précédente. L'ordonnée à l'origine b s'obtient en remplaçant a, x_A, y_A dans $y_A = ax_A + b$ et en résolvant (on peut aussi apprendre $b = y_A - ax_A$).

Exemple 8. ✎ Soient $A\,(2;5)\,, B\,(1;3)$ et $C\,(25;29)$.

1. Donner une équation de (AB). 2. Donner une équation de la parallèle à (AB) contenant C.

4. Trinômes (polynômes de degré 2)

Définition. Une fonction *trinôme du second degré* est une fonction de la forme $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont fixés et $a \neq 0$. La courbe représentative d'un trinôme est une *parabole*.

Proposition 7.Signe

Le *discriminant* du trinôme p est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

⋆ si $\Delta > 0$, deux racines : $\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$. Factorisation : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

signe :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

⋆ si $\Delta = 0$, une racine : $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$. Factorisation : $a(x - x_0)^2$.

signe :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

⋆ si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine réelle et pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.

signe :

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	

Proposition 8.Variations

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$+\infty$ $\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$-\infty$ $\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$ $-\infty$

Exemple 9. ✎ 1. Donner le signe de $-x^2 + 3x - 2$ en fonction de x. 2. Résoudre $-x^2 + 4x - 5 < 0$ sur $\mathbb{R}$ 3. Résoudre $x^4 - x^2 - 2 = 0$ (*resp.* $\leqslant 0$) sur $\mathbb{R}$.

Méthode. Méthode du changement de variable pour se ramener à une équation du second degré

On pose, la plupart du temps $X = x^2$ ou $X = \mathrm{e}^x$ lorsque cela permet de se ramener à un (in)équation du second degré en X.

5. Rappels sur les fractions

Une fraction est dite *irréductible* lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autres que 1 et -1). On écrira toujours les fractions sous forme irréductible.

Proposition 9.

Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, lorsque les dénominateurs sont non nuls,

1. $\dfrac{a}{1} = a$
2. $\dfrac{a\times\mathbf{c}}{b\times\mathbf{c}} = \dfrac{a}{b}$
3. $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$
4. $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$
5. $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$
6. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$
7. $\dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{a + b}{d}$
8. $\dfrac{a}{d} - \dfrac{b}{d} = \dfrac{a - b}{d}$
9. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

Exemple 10. ✎

1. Mettre les fractions au même dénominateur, sous forme irréductible : $A = \dfrac{2}{9} - \dfrac{5}{6} + \dfrac{4}{15}$ et $B = \dfrac{1}{2n^3} - \dfrac{1}{n^4}$.
2. Soit $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}$
   (a) Calculer $f(3)$.
   (b) Déduire de l'exemple précédent et de la question précédente le signe de $f(x)$ en fonction de x

Méthode. Montrer une inégalité ou étudier un signe *via* une étude de fonction

Lorsque les manipulations algébriques (voir la méthode 1) sur les inégalités ne suffisent plus, une méthode très importante pour étudier un signe ou établir une inégalité est la suivante :

1. Dans le cas d'une inégalité du type $A(x) \geqslant B(x)$ à établir, se ramener par soustraction à $f(x) = A(x) - B(x) \geqslant 0$, c'est à dire à l'étude d'un signe.
2. Etablir les variations de la fonction f (par dérivation par exemple).
3. Placer dans le tableau de variations toutes les valeurs pour lesquelles $f(x) = 0$, soit :
   - ⋆ parce qu'elle sont connues d'après les calculs précédents.
   - ⋆ parce qu'elles sont très faciles à trouver.
   - ⋆ en utilisant le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).

6. Fonction inverse

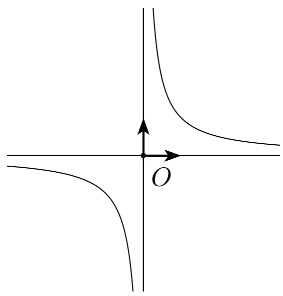
Définition. La fonction *inverse* est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On appelle *fonction rationnelle* toute fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômes. Le quotient de deux fonctions affines est une *fonction homographique*. Elle est représentée par une *hyperbole* (sauf dans les cas particuliers).

Proposition 10.

L'inverse est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Elle est impaire, représentée par une hyperbole, et de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0
$\frac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	



Exemple 11. ✎ Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{1}{-x^2+3x-2}$ et calculer $f'(x)$.

IV. Racine carrée

Définition. La fonction $x \mapsto x^2$ établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On note $x \mapsto \sqrt{x}$ la bijection réciproque. On appelle racine carrée de x le nombre $\sqrt{x}$, unique nombre réel positif dont le carré vaut x.

Proposition 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$.

1. $\left(\sqrt{a}^2\right) = a$ 2. $\sqrt{a^2} = a$ 3. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ 4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

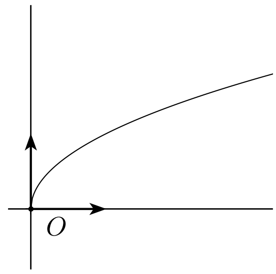
⚠Il n'y a AUCUNE propriété pour les additions ou les soustractions.

⚠lorsque x est strictement négatif, $(\sqrt{x})^2$ n'a aucun sens mais $\sqrt{x^2}$ en a un et on a $\sqrt{x^2} = -x$.

Proposition 12.

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Sa courbe admet une tangente verticale à l'origine.

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$	



Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathcal{D}_u$.
On a alors $\forall x \in \mathcal{D}_u$: $\quad (\sqrt{u})'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Exemple 12. ✎

1. Simplifier $A = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\quad B = \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}$
   et $C = \dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$.
2. Résoudre $\sqrt{x-2} = x$ (*resp.* $\leqslant$) sur $\mathbb{R}$. 3 Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

V. Valeur absolue

Définition. Pour tout réel, x, on pose $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$. C'est la distance du point d'abscisse x à l'origine sur la droite réelle.

Remarque . Comme $|x| = \sqrt{x^2}$, les propriétés de la valeur absolue sont similaires à celles de la racine carrée.

Méthode. Résoudre des (in)équations avec valeurs absolues

Sauf cas particuliers, la résolution se fait par disjonction des cas. On dresse le tableau de signe de la quantité dans la valeur absolue (plus il y a de valeurs absolues, plus le tableau est complexe), puis, sur chacun des intervalles ou les signes sont constants, la résolution se fait de manière classique.
Il y a tout de même quelques cas particuliers simples à retenir.

1. Si $a < 0$, $|f(x)| = a$ et $f(x) \leqslant a$ n'ont pas de solution et $f(x) > a$ est vraie sur $\mathcal{D}_f$.
2. $|f(x)| = 0$ et $f(x) \leqslant 0$ sont équivalentes à $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ est équivalente à $f(x) \neq 0$.
3. Si $a > 0$, $\begin{cases} |f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a \text{ ou } f(x) = -a \\ |f(x)| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant f(x) \leqslant a \\ |f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) > a \text{ ou } f(x) < -a \end{cases}$
4. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ou $f(x) = g(x)$,

où f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

Exemple 13. ✎ Résoudre sur $\mathbb{R}$: 1. $|2x-1| = |5x+1|$ 2. $|2x-1| = 3$ 3. $|2x-1| < 3$ 4. $|2x-1| > -2$ 5. $\left|x^2-2\right| \leqslant 3$

VI. Fonctions exponentielles

Théorème 13.

Soit $q > 0$. Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ appelée *exponentielle de base* q telle que

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. pour tous x et y réels, $f(x+y) = f(x)f(y)$.
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = q^n$.

Par extension, on note $f(x) = q^x$ pour tout réel x.

Proposition 14.

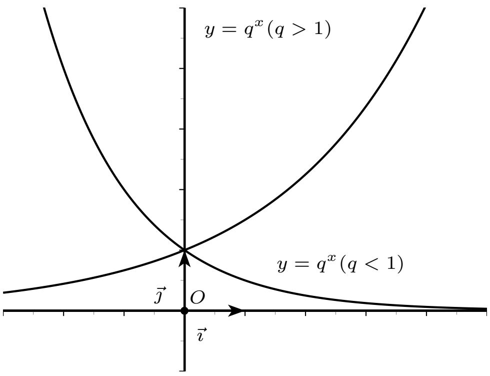
Pour tous x, y réels et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

1. $q^0 = 1$
2. $q^{x+y} = q^x \times q^y$
3. $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$
4. $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$
5. $q^{nx} = (q^x)^n$
6. $q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}$
7. $q^x > 0$

Théorème 15.

Soit $q > 0$. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$ vérifie

1. $f'(x) = f'(0) \times q^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. f str. croissante si $q > 1$, str. décroissante si $q < 1$, et constante si $q = 1$.
3. $q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} q^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = 0$.
4. $q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} q^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = +\infty$.
5. Il existe un unique nombre réel strictement positif, noté e, tel que f définie par $f(x) = e^x$ vérifie $f'(0) = 1$. On a : $e \approx 2{,}718$. La fonction ainsi définie s'appelle la *fonction exponentielle* (de base e) et vérifie donc $f' = f$ sur $\mathbb{R}$
6. Soit u dérivable sur un intervalle I alors e^u est dérivable sur I : $(\mathrm{e}^u)'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.



Exemple 14. ✎ 1. Soient x et y deux réels, écrire $\dfrac{\sqrt{q^{6x}} \times q^{-7y}}{(q^{x+y})^3}$ sous la forme d'une seule exponentielle.

2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

•$\mathrm{e}^{x+3} = 0$ •$\mathrm{e}^{x+3} = 1$ •$\mathrm{e}^x + 3 = 1$
• $\left(\mathrm{e}^{x+3}\right)^2 - \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{x+2} = 0$ • $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 = 0$.

3. Calculer la dérivée de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et de g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}e^{-3x^2}$

Proposition 16.

$T_0 : y = x + 1$.
$\mathcal{C}_{exp}$ est au dessus de T_0 sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

Démonstration. ✎

Remarque . On note également $\exp(x)$ à la place de e^x. L'avantage de cette dernière notation est que les propriétés algébriques des exponentielles sont celles des puissances.

VII. Logarithmes et retour sur les exponentielles et les puissances

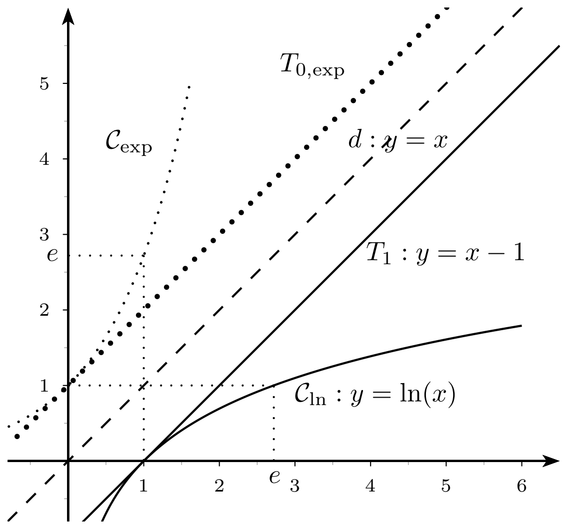
Définition. Le logarithme népérien la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base e. Ainsi pour tout réel y de $]0; +\infty[$ $\ln y$ est l'unique réel x tel que $\mathrm{e}^x = y$.

Proposition 17.

1. Pour tout réel y strictement positif , on a $e^{\ln(y)} = y$
2. Pour tout réel x, on a $\ln(e^x) = x$
3. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
4. Propriétés algébriques : pour tous réels $x, y > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
   (a) $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)$
   (b) $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
   (c) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
   (d) $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Proposition 18.

1. La fonction logarithme est dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
2. $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$.
3. Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors $\ln u : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I, $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$



Exemple 15. ✎ 1. Simplifier au maximum $A = \ln\left(\frac{1}{6}\right) + \ln(3) - \ln 5$ et $B = \ln\left(x^2 - 1\right) - 2\ln(x-1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: • $e^{3x} = 0.2$ • $e^{2x+1} - 3 > 0$ • $\ln(x-8) = 1$ • $\ln(2-x^2) < 0$ • $\ln(2-x) + \ln(2+x) < 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0{,}99^n < 0{,}5$.
4. Quel taux mensuel t donne une augmentation annuelle de 60% ?
5. Etudier les fonctions $f : x :\mapsto x\ln(x), g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)$ et $h : x \mapsto \ln(1-x^2)$.

Méthode. Domaine de résolution d'une (in)équation

Même si ce n'est pas explicitement demander dans l'énoncer, il faut TOUJOURS commencer par donner le domaine de résolution de l'(in)équation, c'est à dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels toutes les expressions sont valides. La résolution effectuée, il faut conserver uniquement les solutions qui appartiennent à cet ensemble. Cette méthode est particuilièrement improtante en présence de quotients, de racines carrées et de logarithmes.

Méthode. Équations, inéquations d'inconnues en exposant.

Lorsque l'inconnue est en exposant : en appliquant le logarithme aux deux membres de l'égalité ou de l'inégalité, sous réserve de positivité, on fait « descendre » l'inconnue.

1. Logarithmes de base q et retour sur l'exponentielle de base q

Définition. Si $q > 0$ et $q \neq 1$, *le logarithme de base* q est $\log_q(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(q)}$ pour $x > 0$.

On note en particulier $\log = \log_{10}$, que l'on appelle logarithme décimal.

Proposition 19.

1. $\forall q > 0, \forall x \in \mathbb{R}, q^x = e^{x\ln(q)}$.
2. La fonction logarihme de base q est la fonction réciproque de l'exponentielle de base q.

Exemple 16. ✎ 1. Calculer $\log(10^n)$, où $n \in \mathbb{Z}$.
2. Etudier les variations du logarithme de base q en fonction de la valeur de q.

2. Fonctions puissances réelles

> **Définition**. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction *puissance* α est la f fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$. On note $f(x) = x^\alpha$ car cette notation est compatible avec la notation puissance sur des monômes.

Exemple 17. ✎ 1. Vérifier que la formule de la dérivée est la même que pour les entiers.
2. Résoudre $x^3 - 2x\sqrt{x} + 5 = 0$ (*resp.* $\leqslant 0$).

Remarque . On peut vérifier que pour $x > 0$, on a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. L'avantage de cette dernière notation est qu'elle permet de constater que la formule de la dérivée de la fonction racine est la même que celle des monômes.

Méthode.

Lorsque la variable est en exposant, il est souvent indispensable de revenir à la notation exponentielle afin d'étudier correctement la quantité.

Exemple 18. ✎ Etudier les fonctions $f : x \mapsto x^x$ et $g : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

Par la suite, nous ajouterons d'autres éléments qui rendent l'étude plus précise.