Chapitre 6 : polynômes

Sommaire

I Premières notions sur les polynômes **2**
1 Vocabulaire de base 2
2 Propriétés du degré 2

II Méthodes classiques sur les polynômes **2**
1 Identification 2
2 Division euclidienne de polynômes 3

III Racines de polynômes et factorisation **3**
1 Lien entre factorisation et degré 4

I. Premières notions sur les polynômes

1. Vocabulaire de base

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle polynôme P (ou encore $P(X)$) une expression de la forme $P = a_n X^n + \dots a_1 X + a_0$.

Les réels $a_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ sont appelés les **coefficients** de P.

- si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n et on note $\deg(P) = n$.
  a_n est appelé le **coefficient dominant** de P. Si $a_n = 1$, on dit que P est un polynôme **unitaire**.
- a_0 est appelé le **coefficient constant** de P, appelé polynôme **constant** si c'est le seul coefficient non nul.
- Si tous les coefficients sont nuls, P est appelé polynôme **nul** et on **pose** $\deg(P) = -\infty$ par convention.
- ⋆ On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré **au plus** n.

Exemple 1. ✎ 1. Donner le degré et le coefficient dominant d'un polynôme constant.
2. A quel ensemble de fonctions peut être identifié $\mathbb{R}_1[X]$? Et $\mathbb{R}_2[X]$?
3. Donner le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant dans chacun des cas suivants :
(a) $P_1 = 7X^3 - 2X^2$ (b) $P_2(X) = X - 1 + X^4$ (c) $P_3 = \left(2X^2+1\right)\left(3X^3-1\right)$ (d) $P_4 = aX^2 + bX + c, (a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$
4. Soit P un polynôme **unitaire** de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le degré et le coefficient dominant de :
(a) P' (b) P^2 (c) $P(X^2)$ (d) $P(X+1) - P(X)$

Remarque . La notation X est une notation abstraite (dont on ne cherchera pas à préciser le sens) qui n'a pas la même signification que le x souvent réservé aux réels. Cependant, on identifiera très souvent P avec la fonction $x \mapsto P(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. En effet, les propriétés d'addition, de multiplication, de factorisation, de dérivation, etc...sont les mêmes.

2. Propriétés du degré

Proposition 1.

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$. On a : 1. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ 2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

Exemple 2. ✎ 1. Dans chacun des cas, trouver des polynômes P et Q de degré 2 tels que :
(a) $\deg(P+Q) = 2$ (b) $\deg(P+Q) = 1$ (c) $\deg(P+Q) = 0$ (d) $\deg(P+Q) = -\infty$
2. Vérifier la seconde partie de la proposition 1 lorsque $\deg(P) = 1$ et $\deg(Q) = 2$. Exprimer les coefficients dominant et constant du polynôme PQ en fonction de ceux de P et de Q.

II. Méthodes classiques sur les polynômes

1. Identification

Proposition 2.

Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont deux à deux égaux.
Il est équivalent de dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = Q(x)$

Exemple 3. ✎ Soit $P = a_1 X + a_0$ et $Q = b_2 X^2 + B_1 X + b_0$. A quelle condition ces polynômes sont-ils égaux ? Que peut-on dire du degré de deux polynômes égaux ?

Remarque . Une application fondamentale de ce résultat est la **méthode d'identification** illustrée ci-dessous.

Exemple 4. ✎ 1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\dfrac{x^2+1}{x-1} = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
2. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
3. Soit $f : x \mapsto (ax+b)e^{2x}$. Déterminer la valeur des réels a et b tels que $f'(x) = xe^{2x}$.

2. Division euclidienne de polynômes

Exemple 5. ✎ Effectuer les divisions euclidiennes de 171 par 5 et de 252 par 6. Conclure en terme de divisibilité.
Rappel : la division s'arrête lorsque le reste est strictement inférieur au diviseur (qui est 5 dans le premier exemple, 6 dans le second) et le nombre est divisible par le diviseur à condition que le reste soit nul.

On cherche maintenant à effectuer la division euclidienne de $A = X^3 + X^2 - 1$ par $B(X) = X - 1$. On adapte la méthode effectuée sur les entiers comme suit :

$$
\begin{array}{rrrr|ll}
 & X^3 & +X^2 & -1 & X & -1 \\ \cline{5-6}
- & X^3 & -X^2 & & X^2 & \\ \cline{2-4}
 & & 2X^2 & -1 & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr|lll}
 & X^3 & +X^2 & & -1 & X & -1 & \\ \cline{6-8}
- & X^3 & -X^2 & & & X^2 & +2X & \\ \cline{2-5}
 & & 2X^2 & & -1 & & & \\
- & & 2X^2 & -2X & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 2X & -1 & & & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr|lll}
 & X^3 & +X^2 & & -1 & X & -1 & \\ \cline{6-8}
- & X^3 & -X^2 & & & X^2 & +2X & +2 \\ \cline{2-5}
 & & 2X^2 & & -1 & & & \\
- & & 2X^2 & -2X & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 2X & -1 & & & \\
- & & & 2X & -2 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 1 & & & \\
\end{array}
$$

Et on arrête la division euclidienne car le reste est 1 et $\deg(1) < \deg(X - 1)$.

En conclusion, on a : $X^3 + X^2 - 1 = (X^2 + 2X + 2)(X - 1) + 1$.

Proposition 3.

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec B non nul. Alors il existe deux polynômes uniques Q et R, avec $\deg R < \deg B$, tels que $A = QB + R$. Q est le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Exemple 6. ✎ 1. Effectuer les divisions euclidiennes de :
(a) $X^4 - 1$ par $X^2 + 1$. (b) $2X^4 - X^3 + 3X - 5$ par $X^2 - X - 2$. (c) $X^2 + 1$ par $X - 1$ et retrouver le résultat de la première question de l'exemple 4.
2. **Une dernière méthode pour calculer les puissances d'une matrice**.
(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 1$.
(b) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Après avoir vérifié que $M^2 - 3M + 2I_2 = 0_{2,2}$ CalculerM^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

III. Racines de polynômes et factorisation

Définition. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et α un nombre réel.
1. α est une racine (réelle) du polynôme P si $P(\alpha) = 0$.
2. P est factorisable par $X - \alpha$ lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, tel que $P = (X - \alpha)\, Q$.

Proposition 4.

α est racine de P si et seulement si P est factorisable par $X - \alpha$

Démonstration. ✎ Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Puis conclure.

Méthode. **Algorithme de factorisation complète d'un polynôme P**

1. Regarder le degré du polynôme P :
   - si $\deg(P) \leqslant 1$, il n'y a rien à factoriser !
   - si $\deg(P) = 2$, on factorise via les identités remarquables dans les cas particuliers et surtout via le calcul du discriminant et des racines éventuelles. Seul cas où P n'est pas factorisable : $\Delta < 0$.
   - si $\deg(P) \geqslant 3$:
     i. Soit on connaît une racine α d'après les questions précédentes, soit on peut chercher si P possède une racine évidente α parmi les nombres $0; 1; -1; 2$ ou -2.
     ii. On factorise P par $X - \alpha$, soit par division euclidienne, soit par la méthode d'identification et on trouve ainsi $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.
2. Réappliquer la méthode précédente sur le polynôme Q.

Remarque . Il ne faut pas surestimer cette méthode qui ne permet la factorisation que de polynômes particuliers ayant des racines connues ou très simples (mais c'est souvent le cas dans les exercices). Il faut savoir que, dès que le degré d'un polynôme est grand, il n'existe aucune méthode systématique (et il n'en existera jamais, c'est prouvé) pour factoriser ce polynôme ! Voici une liste de résultats qui sont hors programme mais qui sont intéressants à retenir car cela peut vous aider dans les exercices.

1. P est factorisable par $(X - \alpha)^2$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ (et la propriété peut se généraliser à des dérivées d'ordre supérieur sans problème). Voir l'exercice 8 pour la preuve.
2. Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine.
3. Tout polynôme est factorisable (en théorie mais pas forcément dans la pratique) en un produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 dont le discriminant est négatif (c'est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre dû à D'Alembert et Gauss qui fait intervenir les nombres complexes).
4. ⚠Le résultat précédent implique qu'un polynôme de degré 4 est toujours factorisable mais cela ne signifie pas qu'il possède nécessairement une racine réelle. Par exemple $X^4 + 2X^2 + 1$ est factorisable mais ne possède aucune racine réelle (c'est clair ?)

Exemple 7. ✎ Factoriser les polynômes suivants :
1. $P = X^3 + X^2 + 4$ 2. $Q = X^3 - 2X^2 - X + 2$ 3. $R = X^5 - 2X^4 - X^3 + 2X^2$ 4. $S = 2X^4 + 3X^3 - 9X^2 + X + 3$

1. Lien entre factorisation et degré

Exemple 8. ✎ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ factorisable par $X - \alpha$ et soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$. Donner une relation entre les degrés de P et de Q.

Proposition 5.

Le seul polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui possède au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul.

Démonstration. ✎ A partir de l'exemple précédent.