Chapitre 8 : probabilités sur un univers fini

I. Introduction

Dans ce chapitre, les probabilités sont introduites uniquement dans le cas où l'univers Ω est un **ensemble fini**, cadre que vous avez largement exploré en classe de terminale. Par conséquent, dans un certain sens, il y a assez peu de nouveauté par rapport à l'année dernière.

En revanche, il est clairement stipulé dans les programmes que l'approche via les arbres pondérés doit être remplacées par des raisonnements sur les événements, qui nécessitent la maîtrise des formules littérales, des opérations sur les ensembles et plus de rigueur et de rédaction en général.

Lors du second semestre, nous généraliserons ces résultats aux probabilités discrètes, pour lesquelles l'univers est infini et l'utilisation des arbres trop limitante.

Enfin, certains calculs de probabilité demanderont une réflexion plus poussée et il sera fréquent de ne pas se limiter à deux expériences successives (ce qui est souvent le cas en terminale, exception faite des schémas de Bernoulli) mais à une série de n expériences successives et donnera de nombreuses occasion de mêler probabilités, suites et matrices (dans l'esprit du programme de spécialité de terminale, en approfondissant là aussi).

II. Le cadre des probabilités

1. Vocabulaire

Définition. Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prévoir l'issue (le résultat).

Exemple 1. 1. Jeter un dé à 6 faces et noter le résultat ; 2. Lancer une pièce de monnaie et noter le résultat.

Lors de la réalisation d'une expérience aléatoire , on est amené à introduire successivement :

1. un univers Ω
2. les événements, parties de Ω
3. une probabilité

Définition. L'**univers** est l'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience, souvent noté Ω.

Exemple 2. ✎ Donner les univers dans les deux cas de l'exemple 1.

Définition. Un **événement** (ou **issue**) est une résultat qui peut être observé lors de l'expérience aléatoire. Comme Ω est fini, cela revient à considérer une partie (ou un sous-ensemble) quelconque de Ω. On parle d'événement :

- **élémentaire** lorsque c'est une partie de Ω réduite à un élément (un **singleton**).
- **certain** s'il est toujours réalisé (c'est alors Ω), et **impossible** s'il n'est jamais réalisé (c'est alors $\emptyset$).

Enfin, $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé un **espace probabilisable** (*rappelons que* $\mathcal{P}(\Omega)$ *désigne l'ensemble des parties de* Ω).

Exemple 3. ✎ Pour le premier cas, donner des événements. Pour le second, donner tous les événements.

2. Opérations sur les événements

Les opérations sur les ensembles, vues au chapitre 5 (intersection, union, complémentaire), permettent de créer de nouveaux événements à partir d'événements connus. Dans le langage des probabilités, il y a un vocabulaire spécifique :

Définition.
1. Deux événements d' intersection vide ($A \cap B = \emptyset$) sont dits **incompatibles** (plutôt que **disjoints**).
2. On appelle **l'événement contraire** d'un événement A (plutôt que le **complémentaire** de A dans Ω) et on note $\overline{A}$ l'ensemble de toutes les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. Deux événements contraires sont incompatibles.

Exemple 4. ✎ 1. Dans une boite, il y a quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire simultanément au hasard deux jetons. On note $A=$ « les deux jetons sont pairs »et $C=$ « la somme des chiffres notés sur les deux jetons est paire ».
(a) Donner tous les tirages possibles.
(b) Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants : $\overline{A}$, « A ou $\overline{A}$ » , $A \cap \overline{A}$.
(c) Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants : $\overline{C}$, $A \cup C$, « A et C » , « A ou $\overline{C}$ » , $A \cap \overline{C}$.
2. Soient A, B, C trois éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. Décrire à l'aide de A, B, C les ensembles suivants :
(a) $\mathcal{A}$ = « seul A se réalise » (b) $\mathcal{B}$ = « A et B se réalisent mais pas C »
(c) $\mathcal{C}$ = « Deux évènements au plus se réalisent » (d) $\mathcal{D}$ = « Deux évènements ou plus se réalisent »

Définition. Soit Ω un univers fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille d'événements de Ω. On dit que cette famille est un **système complet d'événements** lorsque :

1. Les événements sont deux à deux incompatibles. 2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Exemple 5. ✎ Dans chaque cas, dire si les familles suivantes sont des systèmes d'événements complets :

1. $A = \{1\}$, $B =$« la face est un nombre pair » et $C = \{5\}$ (expérience : lancer d'un dé classique).
2. $A =$« la face est un nombre impair » $B =$« la face est un nombre supérieur ou égal à 2 » (idem).
3. un événement A quelconque et son complémentaire (expérience quelconque).
4. $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, où A et B sont deux événements quelconques (idem).

3. Probabilité

Définition. On appelle **probabilité** (ou **loi de probabilité**) sur Ω toute fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; 1]$ vérifiant :

1. $P(\Omega) = 1$ 2. Si A et B sont deux événements **incompatibles**, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$ est appelé un **espace probabilisé**.

Proposition 1.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. Si A et B sont deux événements avec $A \subset B$, on a $P(A) \leqslant P(B)$.
4. Si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
5. Si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.
6. La somme des probabilités de tous les événements élémentaires vaut 1.
7. $P(A)$ est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le compose.

Exemple 6. ✎ Un dé est truqué pour que le 6 apparaîsse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber . Calculer $P(\{4;5;6\})$.

Définition. Dire que deux événements sont **équiprobables** signifie qu'ils ont la même probabilité.

Il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables, chacun ayant donc une probabilité de $\frac{1}{n}$, où $n = \text{card}\,(\Omega)$. On dit que P est la **probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{P}\,(\Omega))$ et, pour chaque événement A :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}\,(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas au total}}$$

Remarque . Il est si fréquent de pouvoir se ramener à une situation d'équiprobabilité lors des expériences aléatoires classiques qu'on le fait souvent sans y réfléchir. On peut citer, en vrac : le lancer d'une pièce ou d'un dé équilibré, le tirage au hasard d'une boule dans une urne (on dit souvent « indiscernables au toucher » pour supposer l'équiprobabilité), le tirage au hasard d'une personne dans un échantillon, d'une carte dans un jeu, etc...(attention cependant à ne pas voir de l'équiprobabilité partout !). En résumé, dans toutes ces situations, calculer la probabiblité d'un événement revient à savoir dénombrer le nombre de cas favorables (le nombre de cas au total étant en général assez vite connu).

Proposition 2. (Rappel du chapitre 2)

$(k;n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de manières de choisir simultanément k objets parmi n objets est $\binom{n}{k}$.

Exemple 7. ✎ On suppose qu'il y a équiprobabilité dans chaque cas. Calculer les probabilités suivantes :

1. le résultat d'un lancer de dé est pair et supérieur ou égal à trois ? pair ou supérieur ou égal à trois ?
2. Dans une urne contenant 7 boules blanches et 5 boules noires, la probabilité qu'on tire une boule noire ? simultanément 2 boules noires ? simultanément 2 boules de la même couleur ? simutanément deux boules de couleurs différentes ? simultanément 2 boules blanches et une boule noire ?

Proposition 3. **Formules du crible de Poincaré**

Soient A, B et C trois événements de Ω :
1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
2. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Remarque . Si les événements sont incompatibles, on retrouve les résultats des définition 6 et proposistion 1.

Exemple 8. ✎ Dans la base de données d'une entreprise, on constate que 20% du personnel parle russe, 38% parle anglais, 26% parle chinois, 8% parle anglais et chinois, 2% parle les trois langues, 9% parle russe et anglais et 4% parle russe et chinois. Quelle est la probabilité, lorsqu'on choisit un employé au hasard, qu'il ne parle aucune de ces trois langues ?

III. Probabilités conditionnelles

Exemple 9. ✎ 1. Les faces paires d'un dé à six faces sont coloriées en blanc et les faces impaires en noir. On lance ce dé ; de loin on se rend compte qu'une face blanche est apparue (on note B cet événement) ; quelle est la probabilité que l'on ait obtenu un six ?

2. Dans une entreprise, il y a 150 femmes ingénieurs , 80 femmes ouvrières, 100 hommes ingénieurs et 130 hommes ouvriers. On tire au sort, de manière équiprobable, un employé. Quelle est la probabilité d'être ingénieur ? D'être ingénieur sachant qu'on est une femme ? D'être une femme sachant qu'on est ingénieur ? D'être une femme ingénieur ?

1. Définition-propriété

Définition. Soient A et B deux événements de Ω avec B tel que $P(B) \neq 0$.

On appelle **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B le nombre noté $P_B(A)$ défini par $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

De plus, l'application $A \mapsto P_B(A)$ est une probabilité sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega))$

Remarque . ⚠Il ne faudra pas confondre $P(A \cap B)$ et $P_B(A)$ dans le premier cas on « regarde » $A \cap B$ par rapport à Ω alors que dans le second, on regarde par rapport à B (on restreint l'univers à B).
La dernière phrase de la définition précédente autorise à appliquer toutes les égalités de la définition 6 et des propriétés 1 et 2 sur une probabilité conditionnelle.

Exemple 10. ✎ Vérifier que la notion intuitive de probabilité conditionnelle vue sur les exemples précédents colle bien avec la définition précédente.

Proposition 4.

Soient A et B deux événements de Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

2. Probabilités composées

On peut généraliser la formule précédente de la manière suivante :

Proposition 5. **Formule des probabilités composées**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots P_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemple 11. ✎ Une urne contient 5 boules blanches et 7 boules noires, indiscernables au toucher. On tire successivement p boules sans remise et on note à chaque tirage la couleur obtenue.

Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant p$, on note N_i : « la i-ième boule tirée est noire » , B_i : « la i-ième boule tirée est blanche » , A : « toutes les boules tirées sont blanches » et C : « toutes les boules tirées sont noires » .

1. Décrire l'univers associé à cette expérience.
2. Déterminer la probabilité de A, dans les cas $p = 4$, $p = 5$, $p = 6$ et $p = 7$.
3. Déduire les probabilités pour chacune des valeurs de p de D : « toutes les boules ont la même couleur » .
4. Déterminer par exemple la probabilité que le tirage soit (B, B, N) lorsque $p = 3$. Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient blanches et la troisième noire lorsque p est un entier quelconque supérieur ou égal à 3 ?

3. Probabilités totales

Théorème 6.

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événements Ω, alors pour tout événement D,

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{k=1}^{n} P(D \cap A_k) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + \dots + P(D \cap A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) + P(A_2) \times P_{A_2}(D) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(D) \end{aligned}$$

Exemple 12. ✎ On reprend le cadre de l'exercice précédent pour $p \geqslant 3$.

1. Calculer les probabilités des événements N_2 et B_2 en utilisant les formules des probabilités totales, en précisant bien le système d'événements complet qui est utilisé pour les calculs.
2. Calculer les probabilités des événements N_3 et B_3 en appliquant la même méthode.

On applique cette formule dès qu'il est plus simple de faire une distinction de cas pour calculer une probabilité souhaitée, portant notamment sur ce qui s'est passé juste avant dans l'expérience aléatoire.

4. Formule de Bayes

Le propriété suivante est une combinaison de la définition d'une probabilité conditionnelle et de la formule des probabilités totales. En classe de terminale, elle est souvent utilisée sans la nommer.

Proposition 7.

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements et B un événement, tous de probabilités non nulles. Alors :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

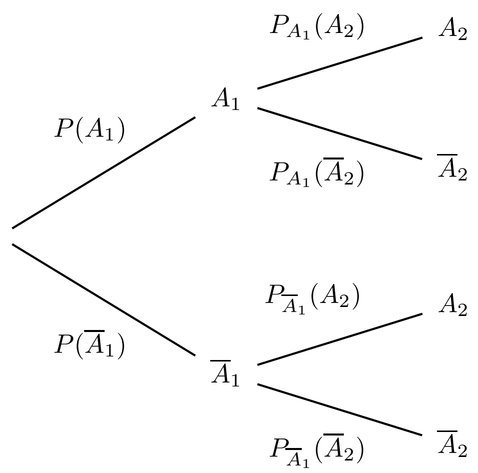
Exemple 13. ✎ On reprend le cadre précédent avec $p \geqslant 3$.

1. Calculer $P_{N_2}(N_1)$. 2. La $3^{\text{ième}}$ boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité que la $1^{\text{ère}}$ boule tirée ait été noire ?

Cette propriété est utilisée pour remonter le temps, c'est à dire pour connaître la probabilité d'un événement passé à l'aide de la situation présente.

5. Lien avec les arbres pondérés

Un arbre est **pondéré**, si chaque branche est affectée d'une probabilité. Un chemin va de la racine à une extrémité en passant par des branches de l'arbre. L'origine commune à deux branches s'appelle un nœud.
On prend comme exemple typique une situation où l'on réitère deux fois une expérience comportant deux issue A et $\overline{A}$ contraire l'une de l'autre . On note A_1 (resp. A_2) l'événement « A se réalise à la première (resp. deuxième) expérience ». Même notations pour $\overline{A}$.
L'univers associé à cette situation comporte quatre issues : $\Omega = \{A_1 \cap A_2\ ;\ A_1 \cap \overline{A_2}\ ;\ \overline{A_1} \cap A_2\ ;\ \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\}$



On peut donner un certain nombre de « règles »qui ne sont finalement qu'un bon aspect visuel (très pratique) des propriétés énumérées précedemment.

Règle 1 la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
Par exemple sur l'arbre ci-dessus, ceci correspond aux formules $P(A_1) + P(B_1) = 1$ ou encore $P_{A_1}(A_2) + P_{A_1}(B_2) = 1$.
Cela correspond aux propriétés concernant les systèmes complets d'événements.

Règle 2 La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin .
Par exemple : la probabilité du chemin $A_1 - A_2$ qui traduit l'événement $A_1 \cap A_2$ est $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$

Cela correspond exactement à la formule des probabilités composées.

Règle 3 La probabilité d'un événement D est la somme des probabilités des chemins qui composent D.

Par exemple : la probabilité de l'événement «obtenir exactement une fois A » est : $P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2)$.

Cela correspond exactement à la formule des probabilités totales.

Exemple 14. ✎ Bilan

1. ⋆ L'urne U_1 contenant 1 boule rouge et 5 boules jaunes.
   ⋆ L'urne U_2 contenant 3 boules rouges et 1 boule jaune.
   ⋆ L'urne U_3 contenant 1 boule rouge et 2 boules jaunes.

   On lance un dé puis on choisit l'urne 1 si le dé tombe sur 1, l'urne 2 si le dé tombe sur un nombre pair et l'urne 3 sinon. Ensuite, on tire une boule dans l'urne choisie.
   On tire une boule jaune. Quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée dans U_1 ?
2. Deux joueurs A et B engagent chacun 32 euros dans le pari suivant : on lance une pièce de monnaie (équilibrée) jusqu'à l'apparition de trois piles ou de trois faces (pas forcément consécutifs). Si les trois piles sortent d'abord, le joueur A gagne les 64 pistoles, sinon B les gagne. Au premier lancer, la pièce est tombée sur « Pile ». Le jeu doit s'arrêter. Comment répartir équitablement les 64 pistoles en tenant compte de la situation actuelle ?
3. Le test de dépistage d'une maladie posséde les caractéristiques suivantes :
   (a) La probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99 (sensibilité du test).
   (b) La probabilité qu'un individu sain ait un test négatif est 0,98 (spécificité du test).

   Exprimer la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit malade en fonction de la proportion de malade dans la population, notée p. Interpréter.

IV. Indépendance

1. entre deux événements

Il est naturel de dire que deux événements A et B de probabilité non nulles sont indépendants si la donnée de l'information « B est réalisé » (resp. « A est réalisé ») n'agit pas sur la réalisation de A (resp. B), i.e. si $P_B(A) = P(A)$ (resp. $P_A(B) = P(B)$). Dans ce cas la formules des probabilités composées devient :

Définition. 2 événements A et B sont indépendants pour P si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarque . Ne pas confondre indépendance et incompatibilité ! La notion d'indépendance est une notion délicate et il faudra parfois la vérifier par le calcul.

Proposition 8.

Soient deux événements A et B de probabilité non nulles. On a l'équivalence :
A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$

Exemple 15. ✎

1. On lance un dé à six faces n fois ($n \in \mathbb{N}^*$). Comment choisir n pour que la probabilité p_n d'obtenir au moins un 6, au cours des n lancers, soit supérieure ou égale a 0,95 ?
2. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On en prélève n successivement et avec remise ($n \geqslant 2$). On considère les événements suivants :
   ⋆ A : « on obtient des boules des deux couleurs » .
   ⋆ B :« on obtient au plus une boule blanche » .

   (a) Calculer $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$.
   (b) Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si et seulement si $2^{n-1} = n + 1$.
   (c) En étudiant la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = 2^{n-1} - (n + 1)$, en déduire pour quelle(s) valeurs de n les événements A et B sont indépendants.

2. d'une famille événements

Lorsqu'il y a plus de deux événements, il y a deux définitions différentes d'indépendance.

Définition. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements.

1. $A_1, \dots, A_n$ sont **2 à 2 indépendants** si : $\forall i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$
2. $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si : $\forall I \in \mathcal{P}([\![1\,;n]\!]) : P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Remarque . Un cas typique : lorsqu'on répète à l'identique une expérience aléatoire, les événements correspondants aux résultats de chaque répétition sont mutuellement indépendants.

Proposition 9.

Des événements mutuellement indépendants sont 2 à 2 indépendants, mais la réciproque est fausse en général !

Exemple 16. ✎ 1. On jette un dé rouge et un dé bleu. Les événements suivants sont-ils 2 à 2 indépendants ? mutuellement indépendants ? Ni l'un ni l'autre ?
• A : « Le dé rouge est pair » • B : « Le dé bleu est pair » • C : « Les deux dés ont même parité »
2. Bob, Joe et son frère vont à la chasse. Ils sont à l'affût, quand soudain ils aperçoivent un lapin. Ils tirent tous les 3 simultanément. Leurs qualités de tireur font que Bob atteint sa cible avec la probabilité $P(B) = \frac{1}{2}$, Joe avec la probabilité $P(J) = \frac{1}{3}$ et son frère avec la probabilité $P(F) = \frac{1}{4}$. On admet que les événements B, J, F sont mutuellement indépendants. Avec quelle probabilité les trois compères pourront-ils se régaler d'un bon civet ce jour là ?

Proposition 10.

Lorsque des événements $A_1, \dots, A_p$ sont indépendants, alors en remplaçant certains des A_i par leurs complémentaires on obtient encore des événements indépendants.

V. Variables aléatoires finies : rappel introductif

1. Définitions

Définition. Lorsqu'à chaque événement élémentaire ω de l'univers on associe un nombre réel, on dit que l'on a défini une **variable aléatoire** (réelle) qui est donc une fonction $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

$X(\Omega)$, appelé l'univers image de X est l'ensemble des valeurs prises par X.

Comme Ω est un ensemble fini, $X(\Omega)$ est également fini, donc du type $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.

Les événements élémentaires de $X(\Omega)$ sont notés $(X = x_i)$, où $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exemple 17. On lance une pièce de monnaie bien équilibrée trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de « face » obtenues et soit $Y = \begin{cases} 1 & \text{si deux côtés identiques apparaîssent successivement} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.
Donner Ω, $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, l'ensemble de toutes les valeurs que prennent X et Y.

Définition. La **loi de probabilité de** X est la donnée des probabilités $P(X = x_i)$ pour tous les i entre 1 et n. Lorsque le nombre d'éléments de l'univers image est petit, on peut présenter la loi de probabilité sous forme de tableau.

Exemple 17 (suite). Donner les lois de probabilité de X et Y.

> **Définition**. L'**espérance** de X est définie par :
> $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i = P(X = x_1)x_1 + P(X = x_2)x_2 + \cdots + P(X = x_n)x_n.$
> On peut la voir comme une limite des moyennes statistiques lorsque le nombre d'expérience tend vers $+\infty$.

Exemple 17 (suite). Donner les espérances de X et Y.