Chapitre 9 : Limites et continuité des fonctions

Sommaire

I. Introduction

On introduit d'abord de manière rigoureuse les notion de limites de fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et de continuité en un point.

Dans un deuxième temps, nous allons compléter les techniques de calcul de limites abordées dans le chapitre sur les suites.

Enfin, nous conclurons par le théorème des valeurs intermédiaires et ses variantes, une des applications principales de la continuité, ce qui permettra d'enrichir la bibliothèque d'exercices sur les fonctions et les suites.

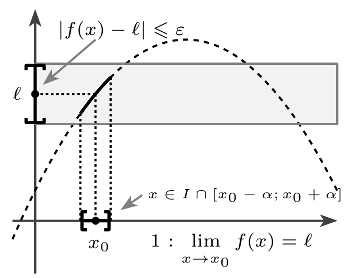
II. Notion de limite de fonctions

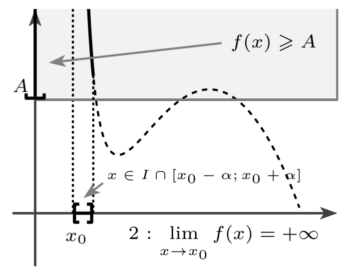
A la différence des suites, pour lesquelles seule la limite quand n tend vers $+\infty$ se définissait, deux autres cas peuvent se présenter ici. La variable x peut également tendre vers $-\infty$ (mais ce n'est pas un cas fondamentalement différent du précédent) mais aussi vers une valeur réel x_0. La raison de cette différence est qu'on peut approcher la variable x aussi près d'un réel x_0 que l'on souhaite sans l'atteindre alors que c'est impossible avec la variable n et un entier n_0 (car si deux entiers sont différents, l'écart entre les deux vaut au minimum 1).

1. Limite lorsque x tend vers un réel.

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un nombre réel appartenant à I ou une extrémité de I, ℓ un nombre réel. On dit que :

1. $f(x)$ **a pour limite** ℓ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ) **lorsque** x **tend vers** x_0 , si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (ou parfois $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$).
2. $f(x)$ **a pour limite** $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$) **lorsque** x **tend vers** x_0 si
$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha],\ f(x) \geqslant A.$$
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou parfois $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$).
3. $f(x)$ **a pour limite** $-\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $-\infty$) **lorsque** x **tend vers** x_0 si
$$\forall A < 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha],\ f(x) \leqslant A.$$
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou parfois $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$).





Remarque .

1. La première définition signifie que « $f(x)$ peut être rendu aussi proche de la valeur ℓ qu'on souhaite, à condition que x soit choisi suffisamment proche de x_0 », la seconde que « $f(x)$ peut être rendu aussi grand et positif qu'on souhaite , à condition que x soit choisi suffisamment proche de x_0 »
2. Dans toutes les définitions, on peut remplacer la condition sur x par « $x \in I$ et $|x - x_0| \leqslant \alpha$ »et rendre les énoncés portant sur x et $f(x)$ plus symétriques. De la même manière, dans la première définition, la fin peut être remplacée par « $f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell - \varepsilon]$ ».
3. Dans les énoncés portant sur x et $f(x)$, on peut choisir de mettre des inégalités strictes (ou des intervalles ouverts) sans changer le sens global de la définition.
4. On dit que la **limite est finie** uniquement dans le premier cas de figure.
5. Une fonction peut ne pas avoir de limite lorsque x tend vers x_0. En revanche, **si la limite existe, elle est unique**.

Exemple 1. ✎ Donner, sans justification : 1. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 1$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)$, puis exprimer l'intervalle $I \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ en fonction de α dans chaque cas.

2. Continuité en x_0 et prolongement par continuité

Dans la définition 1 deux cas peuvent donc se produire :
1. soit x_0 est dans I (éventuellement c'est une extrémité de I). 2. soit x_0 est une extrémité de I qui n'est pas dans I.

Proposition 1. (ET DÉFINITION)

Soit ℓ un nombre réel. On reprend le cadre de la définition 1 et on suppose que f a pour limite ℓ en x_0

1. Cas où x_0 est dans I : on a alors $l = f(x_0)$ et on dit que f **est continue en** x_0
2. Cas où x_0 n'est pas dans I (donc f n'est pas définie en x_0) : alors, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par
$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ pour } x \in I \quad \text{ et } \tilde{f}(x_0) = \ell$$
est appelée le **prolongement par continuité de** f **en** x_0 (la fonction $\tilde{f}$ est continue en x_0, d'où le nom).

Remarque . Il n'est pas rare, afin d'alléger les notations, d'appeler encore f le prolongement par continuité de f.

Exemple 2. ✎ Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{x}$. Comment prolonger f en 0 ?

3. Limite à gauche. Limite à droite

Définition. Soit I un intervalle, x_0 un élément de I qui n'est pas une extrémité de I et f une fonction définie sur I.

1. Lorsque f vérifie l'une des trois propriétés de la définition précédente en remplaçant $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ par $[x_0 - \alpha; x_0[$, on dit que f possède une **limite à gauche** et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$).
2. Lorsque f vérifie l'une des trois propriétés de la définition précédente en remplaçant $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ par $]x_0; x_0 + \alpha]$, on dit que f possède une **limite à droite** et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$).

Ces deux définitions restent valables lorsque f n'est définie que sur $I \setminus \{x_0\}$.

Remarque . Dans le cas 2 (*resp.* 3) de la définition 1, ou encore si les limites en x_0 à droite et à gauche sont infinies mais différentes, la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote (verticale)** à $\mathcal{C}_f$ comme illustré au chapitre 6.

Exemple 3. ✎ Donner une fonction de référence qui admet des limite à gauche et à droite distinctes en 0.

Proposition 2.

Soit I un intervalle et x_0 un élément de I qui n'est pas une extrémité de I. Soit f une fonction définie :

1. sur tout l'intervalle I. Alors, f possède une limite en x_0 si et seulement si f possède une limite à gauche, une limite à droite et si ces deux limites sont égales à $f(x_0)$.
2. sur un $I \setminus \{x_0\}$. Alors, f possède une limite en x_0 si et seulement si f possède une limite à gauche, une limite à droite et si ces deux limites sont égales au même réel ℓ.
Dans ce cas, on peut prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$.

Exemple 4. ✎

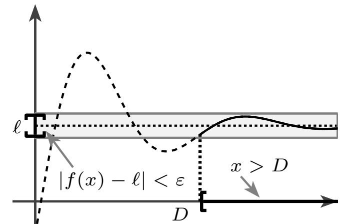
1. Créer des représentations graphiques de courbes qui ne possède pas de limite en 1 mais possèdent des limites à gauche et à droite en 1, éventuellement identiques.
2. Soit f définie par $f(x) = x$ pour $x > 1$ et par $f(x) = 2x^2 - 1$ pour $x < 1$. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

4. Limite lorsque x tend vers l'infini

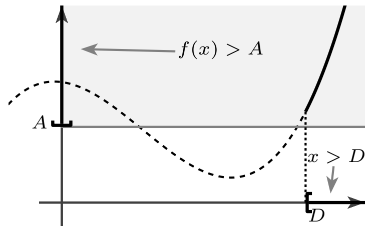
Les définitions qui suivent sont presque identiques à celles vues sur les suites.

Définition. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I non majoré. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite

1. ℓ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ) lorsque x tend vers $+\infty$ si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists D > 0,\ \forall x \in I \cap [D;+\infty[\,, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$).
2. $+\infty$ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ si :
$$\forall A > 0,\ \exists D > 0,\ \forall x \in I \cap [D;+\infty[\,, f(x) \geqslant A.$$
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$).
3. $-\infty$ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $-\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ si :
$$\forall A < 0,\ \exists D > 0,\ \forall x \in I \cap [D;+\infty[\,, f(x) \leqslant A.$$
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$).



$1 : \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$



$2 : \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Remarque .
1. Dans le cas , on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote (horizontale)** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
2. On définit de manière similaire les limites et les asymptotes lorsque x tend vers $-\infty$.

Exemple 5. ✎ A l'aide des représentations graphique des fonctions usuelles vues au chapitre 6, donner les limites suivantes : 1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ 3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}$

III. Calcul de limites

1. Opérations sur les limites

Ce sont exactement les mêmes que pour les suites, y compris pour les formes indéterminées. On ajoute tout de même la propriété de composition de limites, généralisation de celle qui a été vu dans le chapitre sur les suites.

Proposition 3.

Soient a, b et ℓ des réels pouvant aussi valoir $\pm\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$.

2. Croissances comparées

Par rapport aux suites, les factorielles sont à retirer de la liste (car $x!$ n'a pas de sens) et q^n est souvent remplacée par e^{cx}, $c \in \mathbb{R}$ (lorsque $q > 0$, ces deux quantités coïncident sur $\mathbb{N}$ si $q = \mathrm{e}^c$).

Proposition 4.« Croissances comparées »

1. Les règles sur les croissances comparées en $+\infty$ sont exactement les mêmes que celles vues pour les suites.
2. En $-\infty$, les fonctions du type $x \mapsto (\ln(x))^{\beta}$ ne sont pas définies et c'est encore e^{cx} « qui l'emporte » sur x^{α} (selon la notion vue pour les suites).
3. En 0, les fonctions du type $x \mapsto e^{cx}$ tendent vers 1 et ne donnent pas lieu a ce type de formes indéterminées et on a encore x^{α} « qui l'emporte » sur $(\ln(x))^{\beta}$.

Exemple 6. ✎ Déterminer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers :

1. $+\infty$: (a) xe^{-x} (b) $\dfrac{\ln(x)e^x}{x^3}$ (c) $x^{10}e^{-0,1x}(\ln(x))^{2015}$ 2. $-\infty$: (a) xe^x (b) $\dfrac{e^{-x}}{x}$

3. 0 : (a) $x\ln x$ (b) $x^{0.00000001}(\ln(x))^{2015}$ (c) $\dfrac{1}{x\ln(x)}$

3. Techniques pour lever les formes indéterminées

Les méthodes des termes prépondérants ou de la quantité conjuguée concernant les formes indéterminées du type

« $\infty - \infty$ »ou encore « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », restent identiques à celles vues sur les suites. On peut également les appliquer lorsque x tend vers $-\infty$ ou 0.

⚠quand x tend vers 0, les relations de prépondérances sont souvent inversées par rapport à ce qui se passe en $\pm\infty$.

Quand l'exposant est variable, on passe en notation exponentielle, comme cela a été déjà vu dans le chapitre sur les suites.

Exemple 7. ✎ Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+x}{\sqrt{4x^2+1}}$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1}+2x$ 3. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2+x}{x^3+x^2}$ 4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+x}$ 5. $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{x}}$ 6. $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{\ln(x^2)}}$

Méthode. Changement de variable

L'idée est de se ramener par un changement de variable (on pose $X = ...$) a une forme indéterminée connue.

Exemple 8. ✎ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2}$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

Méthode. Factorisation et quotient de polynômes

Lorsqu'on a un quotient de polynôme qui donne une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ »lorsque x tend vers x_0, on lève cette forme indéterminée en factorisant par $x - x_0$ au numérateur et au dénominateur, puis en simplifiant.

Méthode. Se ramener à une limite en zéro

Il est parfois plus facile de traiter les problèmes où la variable x tend vers 0. On passe de $x \to x_0$ à $h \to 0$ en posant $x = x_0 + h$ et en exprimant tout en fonction de h.

Exemple 9. ✎ Calculer $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$ via les deux méthodes exposées ci-dessus.

4. Inégalités et limites

Les résultats sont similaires à ceux donnés pour les suites. Pour généraliser la notion « à partir d'un certain rang » utilisée pour les suites, il est commode d'introduire la notion de **voisinage**.

Définition. On appelle voisinage 1. d'un réel x_0 tout intervalle de la forme $]x_0-\alpha;x_0+\alpha[$, où $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ 2. de $+\infty$ tout intervalle de la forme $]D;+\infty[$, où $D\in\mathbb{R}$. 3. de $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty;D[$, où $D\in\mathbb{R}$.

Proposition 5.« PASSAGE À LA LIMITE DANS LES INÉGALITÉS »

Si f et g sont deux fonctions définies sur un ensemble I, telles que, sur I, on a $f(x)\leqslant g(x)$ et $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, si f et g admettent des limites (finies ou infinies) en x_0, alors : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Remarque .

1. Le résultat reste vrai si l'inégalité portant sur f et g n'est valable que sur un voisinage de x_0.
2. ⚠ Seules les inégalités larges $(\leqslant,\geqslant)$, et pas les inégalités strictes $(<,>)$, passent à la limite. Pensez par exemple à $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

THÉORÈME 6.« D'ENCADREMENT »

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un ensemble I et $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

1. si pour tout $x\in I,\ f(x)\leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.
2. si pour tout $x\in I,\ f(x)\leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.
3. si pour tout $x\in I,\ f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\ell\in\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$.

Remarque . Tous ces résultats restent vrais lorsque les inégalités ne sont valables que sur des voisinages de x_0.

IV. Propriétés globales des fonctions

1. Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones

Toutes ces notions ont été vues, uniquement dans le cadre des suites pour les trois premières (chapitre 4). Les notions de fonctions croissantes, décroissantes... ont été rappelées dans le chapitre 6. Par rapport aux suites, la différence est qu'on pourra restreindre le résultat à un intervalle, qu'il faudra bien préciser dans la rédaction.

Par exemple, on dira que f est majorée par 3 sur $[-1;5]$ ou encore qu'elle est strictement décroissante sur $]-\infty;2[$...

Il existe également un résultat similaire à la convergence monotone des suites.

THÉORÈME 7.« DE LA LIMITE MONOTONE »

Soit f une fonction monotone sur un intervalle $]a;b[$, pour $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.

1. Alors f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en tout réel de $]a;b[$
   ⚠Ces limites ne sont pas forcément égales !
2.
   - ⋆ Si f est croissante majorée ou décroissante et minorée, alors f admet une limite finie en b.
   - ⋆ Si f est croissante non majorée, alors f admet comme limite $+\infty$ en b.
   - ⋆ Si f est décroissante non minorée, alors f admet comme limite $+\infty$ en b.
3.
   - ⋆ Si f est croissante minorée ou décroissante et majorée, alors f admet une limite finie en a.
   - ⋆ Si f est croissante non minorée, alors f admet comme limite $-\infty$ en a.
   - ⋆ Si f est décroissante non majorée, alors f admet comme limite $+\infty$ en a.

2. Continuité sur un intervalle

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite **continue sur l'intervalle** I lorsqu'elle est continue en tout réel x_0 de I. On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I.

Exemple 10. ✎ **Une nouvelle fonction usuelle, la partie entière**

Pour tout nombre réel x, on définie la partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

1. Calculer $\lfloor 1.3 \rfloor$, $\lfloor 1 \rfloor$, $\lfloor 0.9999 \rfloor$, $\lfloor -1.0001 \rfloor$, $\lfloor -1 \rfloor$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$ puis donner ses variations et ses limites à l'infini.
3. En quels points cette fonction semble-telle continue ? discontinue ? Sur quels intervalles semble-t-elle continue ?

Proposition 8.« Continuité des fonctions usuelles »

Toutes les fonctions usuelles, sauf la partie entière, sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 9.« Théorèmes généraux sur la continuité »

Une fonction définie comme la somme, la différence, le produit, le quotient ou la composée de fonctions continues est continue sur tout intervalle où elle est définie.

Remarque . ⚠Ces résultats permettent de conclure à la continuité d'une fonction sans calculs compliqués. En revanche, ils ne permettent pas de conclure qu'une fonction n'est pas continue.

Par exemple, vous pouvez montrer, en revenant à la définition, que la fonction $f : x \mapsto (\lfloor x \rfloor - x)^2 + \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R}$ malgré la présence de la partie entière, pourtant non continue pour les valeurs entières.

Méthode. Etudier la continuité d'une fonction

On utilise en priorité les théorèmes généraux. Pour les valeurs en lesquelles ces théorèmes ne permettent pas de conclure, on revient à la définition : on vérifie si limite de f en x_0 existe, souvent via les limites à gauche et à droite.

Exemple 11. ✎ Etudier la continuité des fonctions suivantes : 1. $f : x \mapsto \begin{cases} e^x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$ 2. $g : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$ 3. h

Remarque . Définir une fonction à l'aide de plusieurs expressions, chacune n'étant valable que sur une partir de l'ensemble de définition n'est pas toujours artificiel. Par exemple, l' impôt en fonction du revenu, qui est d'ailleurs une fonction continue (en quoi est-ce important ?) est défini de cette manière.

Définition. Une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle $[a;b]$ si il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < a_2 \cdots < a_n = b$ telle que chaque restriction $f :]a_i;a_{i+1}[\mapsto \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité à $[a_i;a_{i+1}]$

Remarque .

1. Cela revient à dire que f est continue sur chacun des intervalles $]a_i;a_{i+1}[$ et que les limites à gauche en a_{i+1} et à droite en a_i sont finies.
2. Les fonctions continues sont donc continues par morceaux.
3. Là encore, il existe des exemples concrets, comme le prix du timbre en fonction du poids de la lettre ou encore de nombreux modèles probabilistes très utilisés en finance et en biologie.

Exemple 12. ✎ Parmi les fonctions usuelles, en donner une qui n'est pas continue pas morceau sur son ensemble de définition et une qui est continue par morceau sans être continue.

3. Théorèmes liés à la continuité

Nous avons déjà vu dans le chapitre sur les suites une application importante de la continuité : si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une limite ℓ et que f est continue, alors $\ell = f(\ell)$. En voici une autre :

Théorème 10. « des valeurs intermédiaires »(TVI)

L'image d'un intervalle par une fonction **continue** est un intervalle. Autrement dit :

1. Si f est continue sur un intervalle $[a;b]$, toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f : pour tout réel k situé entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a **au moins** une solution sur $[a;b]$
2. Si f est continue sur un intervalle $]a;b[$, toutes les valeurs situées entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ sont atteintes par f : pour tout réel k situé strictement entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ a **au moins** une solution sur $[a;b]$

Remarque . Les deux versions précédentes peuvent être combinées pour appliquer le TVI à des intervalles $]a;b]$ ou $[a;b[$

Exemple 13. ✎ 1. Justifier que l'équation $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{3}$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1;3]$.

2. Justifier que l'équation $\dfrac{e^x}{e^x + x^2} = \dfrac{1}{3}$ possède au moins une solution sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Théorème 11. « des bornes »ou « de Weierstrass »

Soient a et b deux nombres réels. L'image par une fonction **continue** d'un intervalle $[a;b]$ (de tels intervalles sont appelés segment) est un segment aussi. Autrement dit :
f est bornée et atteint ses bornes sur $[a;b]$, et $f([a;b]) = [m, M]$, où m est le minimum et M le maximum de f sur le segment $[a;b]$. On note $m = \min\limits_{t\in[a;b]} f(t)$ et $M = \max\limits_{t\in[a;b]} f(t)$

Remarque . ⚠Ne pas confondre $f([a;b])$ et $[f(a);f(b)]$! (calculer $f([-2;2])$ et $[f(-2);f(2)]$ pour la fonction carrée)

Si on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie sur f, on obtient des résultats sur l'unicité de la solution de $f(x) = k$.

Théorème 12. « de la bijection »

Toute fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I est **bijective** de I sur l'intervalle $f(I)$.
Autrement dit, on obtient **l'existence et l'unicité** de la solution pour toute équation du type $f(x) = k$, où k est situé entre $f(a)$ et $f(b)$ (situé strictement entre les limites de f en a et en b dans le cas d'un intervalle ouvert).
Enfin, la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Méthode. Nombre de solutions d'une équation $f(x) = k$, lorsque f est continue

Lorsqu'on ne peut pas résoudre l'équation de manière algébrique, on applique le théorème de la bijection à chacun des intervalles sur lesquels f est strictement monotone.

Exemple 14. ✎

1. Montrer que l'équation $x^2 + \ln(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, qu'on notera α, puis justifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ (on précise que $\ln(2) \approx 0.7$).
2. Montrer que l'équation $x\ln(x) = 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, qu'on notera α, puis justifier que $1 < \alpha < e$.