Sujet 4

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n - 6, u_0 = 3 \text{ et } u_1 = 4.$$

1. On pose $v_n = u_n - 1$
   Moutrer que (v_n) est linéaire d 'ordre 2.
2. En déduire l'expression do u_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n + 2n$

1. Calculer u_0, u_1, u_2.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

Sujet 5

Exercice 1. Soit (u_n) la sutie deffine par : $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n + 4$ et $u_0 = 2$ et $u_1 = 9$

1. On pose $v_n = u_n - 1$
   Monter que (v_n) est lineaire d'ordre 2 puis calculer v_n et u_n en fonction de n
2. calcnln $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{4^n}$.

Exercice 2. Soient $(u_n)_{n \leqslant 1}$ et $(v_n)_{n \leqslant 1}$ définies par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Sujet 6

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et
$\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = \dfrac{4 + u_n}{1 + u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par recurrence que $\forall n \geqslant 0, u_n$ existe et $u_n \geqslant 0$.
3. Soit $(v_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de fíne par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

Montrer que $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est géométrique, colculer v_0 puis exprimer v_n et u_n en fonction de n.

Sujet 7

Exercice 1. Calculer :

1. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+2n!}{n!+n^2}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$.

Exercice 2. Soient $(U_n)_{n\geqslant 0}$ et $(V_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par $U_0=1, V_0=4$ et par les égalités valables pour tout entier $n\geqslant 0$: $U_{n+1}=\dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$ et $V_{n+1}=\dfrac{U_n+V_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n\geqslant 0 : V_{n+1}-U_{n+1}=\dfrac{(V_n-U_n)^2}{2(U_n+V_n)}$.
2. Montrer par récurrence que $\forall n\geqslant 0 : 0<U_n\leqslant V_n$.
3. Montrer que $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et que $(V_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
4. Montrer à l'aide des questions précédentes que $\forall n\geqslant 0$:

$V_{n+1}-U_{n+1}\leqslant \dfrac{1}{2}(V_n-U_n)$

5. Montrer par récurrence que $\forall n\geqslant 0 : V_n-U_n\leqslant 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
6. Montrer à l'aide des questions précédentes que $(U_n)_{n\geqslant 0}$ et $(V_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers une limite commune l.
7. Montrer que la suite $(U_nV_n)_{n\geqslant 0}$ est constante puis en déduire la valeur de l.

Sujet 8

Exercice 1. Soit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$.

1. Calculer S_1 et S_2.
2. Justifier que pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$: $\dfrac{1}{n+2}\leqslant\dfrac{n}{n^2+k}\leqslant\dfrac{n}{n^2+1}$.
3. En déduire un encadrement de S_n puis $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2. Soient $(V_n)_{n\geqslant 0}$ et $(W_n)_{n\geqslant 1}$ les suites définies par $V_n=(U_n)^2$ et $W_n=\dfrac{U_n}{n}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n\geqslant 0 : U_n$ existe et $U_n\geqslant 1$.
2. Pour tout entier $k\geqslant 0$, exprimer $V_{k+1}-V_k$ en fonction de U_k puis en déduire que $\forall k\geqslant 0 : V_{k+1}-V_k\geqslant 4$.
3. En déduire que $\forall n\geqslant 1 : V_n\geqslant 4n+1$ et $U_n\geqslant\sqrt{4n+1}$, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.
4. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, convergente vers une limite l dont on donnera un encadrement.

Sujet 9

Exercice 1. Soit $(V_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\forall n \geqslant 0 : V_{n+2} = \sqrt{V_n V_{n+1}}$.
On donne $V_0 = 1$ et $V_1 = e$. On admet que $\forall n \geqslant 0 : V_n$ existe et $V_n > 0$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $U_n = \ln V_n$ est récurrente linéaire d'ordre deux.
2. Exprimer U_n puis V_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\forall n \geqslant 0 : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et par $F_0 = F_1 = 1$.

1. Calculer F_2, F_3, F_4, F_5.
2. Justifier sans les calculer qu'il existe des réels α et β tels que $\forall n \geqslant 0$:

$$F_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3. Déterminer α et β puis vérifier que $\forall n \geqslant 0$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Sujet 10

Exercice 1. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $U_0 = 2$ et $\forall n \geqslant 0 : U_{n+1} = \dfrac{(U_n)^2}{2U_n - 1}$. Soient $(V_n)_{n\geqslant 0}$ et $(W_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n}$ et $W_n = \ln V_n$. 1) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \geqslant 0 : U_n > 1$.

2. Montrer que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique. 3)

W_n, V_n puis U_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\forall n \geqslant 0 : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et par $F_0 = F_1 = 1$.
$(F_n)_n \geqslant 0$

Calculer F_2, F_3, F_4, F_5.

2. $F_n = \alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.
3. Déterminer α et β puis vérifier que $\forall n \geqslant 0$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Sujet 11

Exercice 1. Soit $(V_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\forall n \geqslant 0 : V_{n+2} = \sqrt{V_n V_{n+1}}$.
donne $V_0 = 1$ et $V_1 = e$. On admet que $\forall n \geqslant 0$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $U_n = \ln V_n$ est récurrente linéaire
2. Exprimer U_n puis V_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par $\forall n \geqslant 0 : a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$
On donne $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0 : a_n + b_n = 1$.
2. En déduire que la suite $(a_n)_n \geqslant 0$ est arithmético-géométrique.
3. Exprimer a_n en fonction de n.
4. Soit $n \geqslant 0$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} a_k$ en fonction de n.