Sujet 1

Exercice 1. Définition d'une matrice inversible. Montrer que le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible.

Exercice 2. Solent $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

1. Calculer B et B^2. Que vaut B^j pour $j \geqslant 2$?
2. Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0 : A^n = 2^n I + n2^{n-1}B$. (*)
3. Expliciter A^n.
4. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
   L'égalité (*) est-elle encore vraie pour $n = -1$?

Sujet 2

Exercice 1. Définition d'une matrice symétrique. Montrer que le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.

Exercice 2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A \neq O$ et $A^2 = O$.
On pose $C(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \backslash AM = MA\}$.

1. Justifier que A n'est pas inversible.
2. Justifier que $C(A)$ est non vide.
3. Montrer que $\forall M \in C(A), \forall N \in C(A), \forall \lambda \in \mathbf{R} : M + N \in C(A)$ et $\lambda M \in C(A)$.
4. Montrer que si $M \in C(A)$, alors $(AM)^2 = O$.

Sujet 3

Exercice 1. Définition d'une matrice triangulaire supérieure. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice triangulaire soit inversible.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$ où a est une constante réelle non nulle.

1. Établir une relation entre A^2, A et I où I est la matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de I et A.
3. On souhaite résoudre l'équation (E) d'inconnue $X \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) : XA + AX = I$.
4. (a) Montrer que si X est solution de (E), alors X commute avec A^2.
   (b) En déduire que si X est solution de (E), alors X commute avec A.
   (c) Résoudre l'équation (E).

Sujet 4

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Exprimer $(AB)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1}, puis ${}^t(AB)$ en fonction de ${}^tA$ et ${}^tB$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient (U_n) et (V_n) les suites définies par $U_0 = 0, V_0 = 1$ et par les égalités : $U_{n+1} = -U_n + V_n$ et $V_{n+1} = 2U_n$.

1. Calculer A^2.
2. Déterminer les réels a et b tels que $A^2 = aA + bI$.
3. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I et A.
4. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonctions de I et A.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$: $A^n = U_nA + V_nI$.
6. Montrer que les suites $(U_n + V_n)_{n\geqslant 0}$ et $(2U_n - V_n)_{n\geqslant 0}$ sont géométriques.
7. En déduire U_n et V_n en fonction de n.
8. Expliciter A^n.

Sujet 5

Exercice 1. Soient a, b, c des réels non tous nuls.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A = X\,{}^tX$.

1. Quelle est la taille de la matrice A ? Montrer que A est symétrique.
2. Justifier qu'il existe une matrice non nulle $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ telle que ${}^tXU = 0$.
3. En déduire que A n'est pas inversible.

Sujet 6

Exercice 1. On dit qu'une matrice carrée est stochastique si ou nuls et si la somme de ses coefficients sur chaque ses coefficients sont positifs 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que A est stochastique puis déterminer $E = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \backslash AX = X\}$.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$ deux matrices stochastiques de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que AA' est stochastique.