Interrogation écrite n°1 (Durée 20')

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

Calculer DM, MD.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^k pour tout entier $k \geqslant 2$. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 2$.
2. En développant $(A - 3I)^3$, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Réponse

1. On a : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = 0_3$ et pour tout $k \geqslant 3, N^k = N^{k-3} \times N^3 = 0_3$.

   Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} A^n = (N+3I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^k (3I)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 3^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^k \end{aligned}$$

   Or pour tout entier $k \geqslant 3, N^k = 0_3$. D'où

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{2} 3^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^k \\ &= 3^{n-0} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} I + 3^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} N + 3^{n-2} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 2n3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-1} \\ 0 & 3^n & n3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, soit $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \dfrac{n(n+3)}{2} 3^{n-1} \\ 0 & 3^n & n3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

2. On a $(A - 3I)^3 = N^3 = 0_3$. D'où $A^3 - 9A^2 + A - 27I = 0_3$.

   D'où $A\left(\frac{A^2-9A+27I}{27}\right) = I$. Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{A^2-9A+27I}{27}$.

   On a $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 15 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{27}\left(\begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 & -1/9 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.