

Sommés doubles

Exercice 1 1.
$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 4}} \frac{i}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4}.$$

2.
$$1 \times 1^2 + 2 \times 1^2 + 3 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} i \times j^2.$$

Exercice 2 1. La valeur de S correspond à la valeur de la somme
$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij^2.$$

2. Les indices i et j étant indépendants, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ij^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left(i \left(\sum_{j=1}^n j^2 \right) \right) = \sum_{i=1}^n \left(i \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 3 1. La procédure suivante permet de calculer S_n , T_n et U_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
T=0
U=0
for i=1:n do
    for j=1:n do
        S=S+i
        T=T+j*2^i
        U=U+i*j
    end
end
disp(U,T,S)
```

On teste cette procédure pour $n = 5$:

```
-->exec('C:\TP\TP11\exo3a.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
75.
930.
225.
```

2. Calculons ces trois sommes:

- Pour S_n :

$$S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n i \right) = \sum_{j=1}^n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \times \sum_{j=1}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2} \times n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

- Pour T_n :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} j2^i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n j2^i \right) = \sum_{i=1}^n \left(2^i \left(\sum_{j=1}^n j \right) \right) = \sum_{i=1}^n \left(2^i \times \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \sum_{i=1}^n 2^i = \frac{n(n+1)}{2} \times 2 \frac{1-2^n}{1-2} = n(n+1)(2^n - 1). \end{aligned}$$

- Pour U_n :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ij \right) = \sum_{i=1}^n \left(i \left(\sum_{j=1}^n j \right) \right) = \sum_{i=1}^n \left(i \times \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

On teste ces résultats pour $n = 5$:

```
-->(5^2)*(5+1)/2
ans =
75.
-->5*(5+1)*(2^5-1)
ans =
930.
-->(5^2)*((5+1)^2)/4
ans =
225.
```

On obtient les mêmes résultats que ceux obtenus à la question précédente.

Exercice 4

- $\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (j-i) = (1-1) + (2-1) + (3-1) + (4-1) + (5-1) + (2-2) + (3-2) + (4-2) + (5-2) + (3-3) + (4-3) + (5-3) + (4-4) + (5-4) + (5-5).$
- $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{i}{j}.$

Exercice 5

- $\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (j-i) = (2-1) + (3-1) + (4-1) + (5-1) + (3-2) + (4-2) + (5-2) + (4-3) + (5-3) + (5-4).$
- $\frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4} = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \frac{j}{i}.$

Exercice 6 1. La valeur de S correspond à la valeur de la somme $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$. On teste pour $n = 5$:

```
-->exec('C:\TP11\exo4a.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
10.
```

2. On a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \frac{i}{j} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(\sum_{i=1}^j i \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1 \right). \end{aligned}$$

On obtient deux sommes usuelles. Donc:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n \frac{i}{j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+1) + 2n}{4} = \frac{n(n+3)}{4}.$$

On teste la formule obtenue pour $n = 5$

```
-->5*(5+3)/4
ans =
10.
```

On obtient le même résultat qu'à la question 1.

Exercice 7 1. La procédure suivante permet de calculer S_n et T_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
T=0
for i=1:n do
    for j=i:n do
        S=S+1
    end
end
for i=1:(n-1) do
    for j=(i+1):n do
        T=T+i
    end
end
disp(T,S)
```

On teste cette procédure pour $n = 5$:

```
-->exec('C:\TP\TP11\exo5a.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
15.
85.
```

2. Pour S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \sum_{i=1}^n (n-i+1) = - \sum_{i=1}^n i + (n+1) \sum_{i=1}^n 1 = -\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Pour T_n :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(i \sum_{j=i+1}^n 1 \right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

En testant pour $n = 5$, on obtient les mêmes résultats que ceux obtenus à la question précédente.

Exercice 8 1.

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \frac{1}{j} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{j}{j} = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j ij \right) = \sum_{j=1}^n \left(j \sum_{i=1}^j i \right) = \sum_{j=1}^n \left(j \times \frac{j(j+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^3 + \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{3n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1)}{24} \\ &= \frac{n(n+1)(3n(n+1) + 2(2n+1))}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2 + 3n + 4n + 2)}{24} \\ &= \frac{n(n+1)(3n^2 + 7n + 2)}{24}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} (i+j) \right) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^n \left(\frac{(j-1)j}{2} + (j-1)j \right) \\
&= \sum_{j=2}^n \frac{3(j^2-j)}{2} = \frac{3}{2} \sum_{j=2}^n j^2 - \frac{3}{2} \sum_{j=2}^n j = \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^2 - 1 \right) - \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^n j - 1 \right) \\
&= \frac{3}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} \frac{3n(n+1)}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \frac{n(n+1)((2n+1)-3)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n-2)}{4} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

4.

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j} = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^n 2^{i+j} \right) = \sum_{j=0}^n \left(2^j \sum_{i=0}^n 2^i \right) = \sum_{j=0}^n 2^j \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} \frac{1-2^{n+1}}{-1} = (1-2^{n+1})^2$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} |i-j| + \sum_{1 \leq i \leq n} 0 + \sum_{1 \leq j < i \leq n} |i-j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} (i-j) \\
&= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) = 2 \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^j (j-i) \right) = 2 \sum_{j=2}^n \left(j^2 - \frac{j(j+1)}{2} \right) = 2 \sum_{j=2}^n \frac{j^2-j}{2} \\
&= \sum_{j=2}^n (j^2-j) = \sum_{j=1}^n (j^2-j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)((2n+1)-3)}{6} \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j i \right) + \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{(i-1)i}{2} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} = \sum_{j=1}^n j(j+1) - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$