Correction du TP11

Sommes doubles

Exercice 1 1.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(j\times\frac{j(j+1)}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^3+\sum_{j=1}^{n} j^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{3n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)}{24}\\ &= \frac{n(n+1)\left(3n(n+1)+2(2n+1)\right)}{24}=\frac{n(n+1)(3n^2+3n+4n+2}{24}\\ &= \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(i+j)\right)=\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i+\sum_{i=1}^{j-1} j\right)=\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2}+(j-1)j\right)\\ &= \sum_{j=2}^{n}\frac{3(j^2-j)}{2}=\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n} j^2-\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n} j=\frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2-1\right)-\frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j-1\right)\\ &= \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\frac{n(n+1)((2n+1)-3)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n-2)}{4}=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

3.

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} 2^{i+j}=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} 2^{i+j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(2^j\sum_{i=0}^{n} 2^i\right)=\sum_{j=0}^{n} 2^j\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=\frac{1-2^{n+1}}{-1}\frac{1-2^{n+1}}{-1}=(1-2^{n+1})^2.$$

4.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} 1\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\times n=\frac{n(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2 1. (a) La valeur de S en sortie correspond à la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)$.

(b) On décompose S en trois sommes, en distinguant les cas où $i<j$, $i=j$ et $i>j$:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j) &= \sum_{1\leq i<j\leq n}\min(i,j)+\sum_{1\leq i=j\leq n}\min(i,j)+\sum_{1\leq j<i\leq n}\min(i,j)\\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} i+\sum_{1\leq i\leq n} i+\sum_{1\leq j<i\leq n} j.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j) &= \sum_{1\leq i<j\leq n} i+\sum_{1\leq i\leq n} i+\sum_{1\leq j<i\leq n} j=2\sum_{1\leq i<j\leq n} i+\sum_{1\leq i\leq n} i\\ &= 2\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i\right)+\sum_{1\leq i\leq n} i=2\sum_{j=2}^{n}\frac{(j-1)j}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \sum_{j=2}^{n} j^2-\sum_{j=2}^{n} j+\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{j=1}^{n} j^2-1-\sum_{j=1}^{n} j+1+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

2. Voici la procédure pour calculer T_n:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
T=0
for i=1:n do
    for j=1:n do
        if i>j then
            T=T+i
        else
            T=T+j
        end
    end
end
disp(T)
```

3. (a) Voici la procédure pour calculer U_n:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
U=0
for i=1:n do
    for j=1:n do
        U=U+abs(i-j)
    end
end
disp(U)
```

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n}|i-j| &= \sum_{1\leq i<j\leq n}|i-j| + \sum_{1\leq i\leq n}0 + \sum_{1\leq j<i\leq n}|i-j| = \sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i) + \sum_{1\leq j<i\leq n}(i-j)\\
&= 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i) = 2\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(j-i)\right) = 2\sum_{j=2}^{n}\left(j^2-\frac{j(j+1)}{2}\right) = 2\sum_{j=2}^{n}\frac{j^2-j}{2}\\
&= \sum_{j=2}^{n}(j^2-j) = \sum_{j=1}^{n}(j^2-j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)((2n+1)-3)}{6}\\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 1.

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} q^j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}q^j\right) = \sum_{j=1}^{n} jq^j.$$

2. Avec la formule d'interversion des indices, on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} jq^j &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} q^j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}q^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-i}q^{k+i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(q^i\sum_{k=0}^{n-i}q^k\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(q^i\frac{1-q^{n-i+1}}{1-q}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{q^i-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n}q^i - \sum_{i=1}^{n}q^{n+1}\right) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{k=0}^{n-1}q^{k+1} - \sum_{i=1}^{n}q^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{1-q}\left(q\sum_{k=0}^{n-1}q^k - \sum_{i=1}^{n}q^{n+1}\right) = \frac{1}{1-q}\left(q\frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}\right)\\
&= \frac{q-q^{n+1}-nq^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2} = \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$