Correction du TP13

Simulations de variables aléatoires discrètes

1 Lois discrètes usuelles

1.1 Loi uniforme

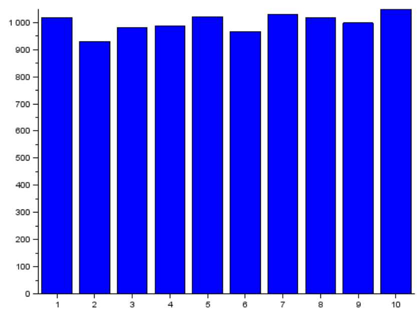
1. Voir le cours.
2. La loi uniforme est la loi de l'équiprobabilité. Par exemple, lors du lancer d'un dé équilibré, notons X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.
3. Voici la procédure pour simuler une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
X=floor(rand()*n)+1
disp(X)
```

4. En utilisant la console Scilab:

```
-->U=grand(1,10000,'uin',1,10);
-->M=tabul(U,"i")
 M  =
    1.     1019.
    2.     931.
    3.     982.
    4.     987.
    5.     1021.
    6.     966.
    7.     1030.
    8.     1018.
    9.     998.
    10.    1048.
-->x=M(:,1);
-->f=M(:,2)/10000;
-->bar(x,f)
```

On obtient alors le résultat suivant:



On obtient bien une loi uniforme: la fréquence d'apparition de chacun des numéros de 1 à 10 est sensiblement la même (environ 0.1).

1.2 Loi de Bernoulli

1. Voir le cours.
2. Considérons le lancer d'une pièce truquée telle que la probabilité de faire pile est égale à $p \in]0,1[$ (et celle de faire face est égale à $1-p$). Soit X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient pile et 0 si on obtient face.

   Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

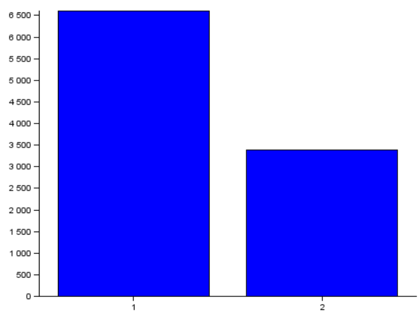
3. Voici la procédure pour simuler une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$:

```
p=input('Donner une valeur de p: ')
if rand()<p then
    X=1
else
    X=0
end
disp(X)
```

4. En utilisant la console Scilab:

```
-->U=grand(1,10000,'bin',1,1/3);
-->M=tabul(U,"i")
 M  =
    0.    6603.
    1.    3397.
-->x=M(:,1);
-->f=M(:,2)/10000;
-->bar(x,f)
```

On obtient alors le résultat suivant:



On obtient bien une loi binomiale de paramètre $\frac{1}{3}$: la fréquence d'apparition du 0 est d'environ $\frac{2}{3}$ et la fréquence d'apparition du 1 est d'environ $\frac{1}{3}$.

1.3 Loi binomiale

1. Voir le cours.

2. On réalise n lancers successifs d'une pièce truquée telle que la probabilité de faire pile est égale à $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors de ces n lancers.

   Alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

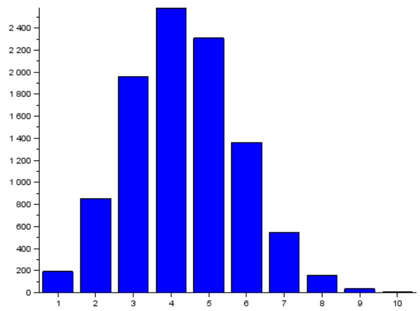
3. Voici la procédure pour simuler une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
p=input('Donner une valeur de p: ')
X=0
for k=1:n do
    if rand()<p then
        X=X+1
    end
end
disp(X)
```

4. En utilisant la console Scilab:

```
-->U=grand(1,10000,'bin',10,1/3);
-->M=tabul(U,"i")
 M  =
    0.    191.
    1.    856.
    2.    1960.
    3.    2581.
    4.    2311.
    5.    1364.
    6.    544.
    7.    155.
    8.    34.
    9.    4.
-->x=M(:,1);
-->f=M(:,2)/10000;
-->bar(x,f)
```

On obtient alors le résultat suivant:



1.4 Loi géométrique

1. Voir le cours.
2. On lance indéfiniment une pièce truquée telle que la probabilité de faire pile est égale à $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.

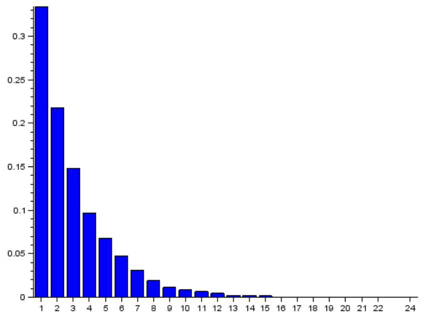
   Alors X suit une loi géométrique de paramètre p.
3. Voici la procédure pour simuler une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$:

```
p=input('Donner une valeur de p: ')
X=1
while rand()>p do
    X=X+1
end
disp(X)
```

4. En utilisant la console Scilab:

```
-->U=grand(1,10000,'geom',1/3);
-->M=tabul(U,'i')
 M  =
    1.      3337.
    2.      2177.
    3.      1481.
    4.      965.
    5.      680.
    6.      476.
    7.      310.
    8.      191.
    9.      115.
    10.     86.
    11.     63.
    12.     45.
    13.     20.
    14.     23.
    15.     16.
    16.     2.
    17.     2.
    18.     4.
    19.     1.
    20.     3.
    21.     1.
    22.     1.
    24.     1.
-->x=M(:,1);
-->f=M(:,2)/10000;
-->bar(x,f)
```

On obtient alors le résultat suivant:



1.5 Loi de Poisson

1. Rappelons que si X_n suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, alors:

$$X_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, n]\!],\ P([X_n = k]) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Alors, si $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned} P([X_n = k]) &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

2. Pour la première limite:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} &= \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n} = 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1. \end{aligned}$$

Pour la deuxième limite:

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right) \times \exp\left(k\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right).$$

Alors:

- pour le premier terme du produit:

$$\exp\left(n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right) = \exp\left(-\lambda\frac{\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}{-\frac{\lambda}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-\lambda\times 1) = e^{-\lambda}.$$

- pour le deuxième terme du produit:

$$\exp\left(k\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

Par produit des limites, on obtient:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}.$$

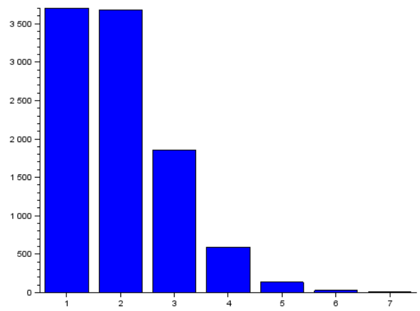
3. On déduit immédiatement des deux précédentes questions que:

$$\lim_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

4. En utilisant la console Scilab:

```
-->U=grand(1,10000,'poi',1);
-->M=tabul(U,"i")
 M  =
    0.    3700.
    1.    3679.
    2.    1853.
    3.    595.
    4.    136.
    5.    28.
    6.    9.
-->x=M(:,1);
-->f=M(:,2)/10000;
-->bar(x,f)
```

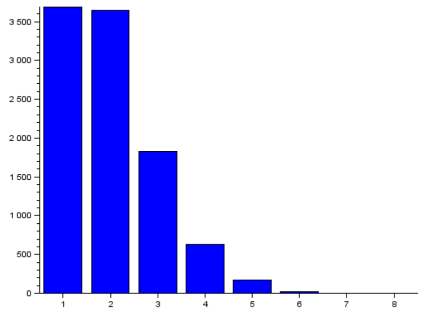
On obtient alors le résultat suivant:



5. Voici la procédure demandée:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
U=grand(1,10000,'bin',n,1/n)
M=tabul(U,'i')
x=M(:,1);
f=M(:,2)/10000;
bar(x,f)
```

Après exécution, pour $n = 1000$, on obtient:



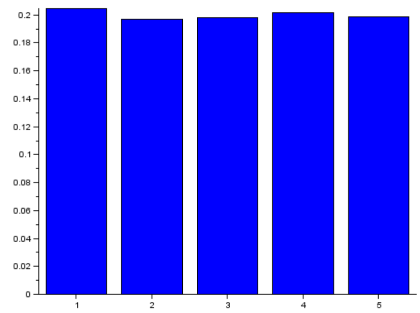
Ce résultat est sensiblement le même que celui de la question précédente. Cela confirme la propriété démontrée à la question 3.

2 Extrait du sujet ECRICOME Eco 2015

1. Voici le programme complété:

```
N=input('Doner un entier naturel non nul ');
S=zeros(1,N);
for k=1:10000 do
    i=1
    M=N
    while grand(1,1,'bin',1,1/M)==0 do
        i=i+1;
        M=M-1;
    end
    S(i)=S(i)+1
end
disp(S/10000)
bar(S/10000)
```

2. On exécute la procédure pour $N = 5$ et on obtient le résultat suivant:



X semble suivre une loi uniforme sur $[\![1, 5]\!]$.

3. On a, en utilisant la formule des probabilités composées:

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P(N_1) = \frac{1}{N}, \\
P(X=2) &= P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N}, \\
P(X=3) &= P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

4. $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, en utilisant la formule des probabilités composées:

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\
&= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \ldots \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(N_k) \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \ldots \times \frac{(N-1)-(k-2)}{N-(k-2)} \times \frac{1}{N-(k-1)} \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \ldots \times \frac{N-k+1}{N-k+2} \times \frac{1}{N-k+1} \\
&= \frac{1}{N},
\end{aligned}$$

par télescopage. Ainsi, X suit une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.

5. D'après le cours, $E(X) = \dfrac{N+1}{2}$. Ainsi, il faut en moyenne $\dfrac{N+1}{2}$ tirages pour obtenir la boule noire.