Correction du TP4

Calcul matriciel

Exercice 1 1. On définit les matrices sur Scilab:

```
-->A=[2 3 -2;4 2 5];
-->B=[2 1 3;-4 0 1;3 -1 -2];
-->C=[-1 0 3 -2;4 2 0 1;3 1 -4 -3];
-->D=[-2 1 4;3 -4 2];
```

2. Les produits de deux matrices qui sont bien définis sont AB, AC, BC, DB et DC:

```
-->A*B, A*C, B*C, D*B, D*C
 ans  =
  - 14.    4.    13.
    15.  - 1.    4.
 ans  =
    4.     4.    14.    5.
    19.    9.  - 8.   - 21.
 ans  =
    11.    5.  - 6.   - 12.
    7.     1.  - 16.    5.
  - 13.  - 4.    17.  - 1.
 ans  =
    4.   - 6.  - 13.
    28.    1.    1.
 ans  =
    18.    6.  - 22.  - 7.
  - 13.  - 6.    1.   - 16.
```

Les produits de trois matrices qui sont bien définis sont ABC et DBC (pas besoin de parenthésés ces produits car le produit est associatif):

```
-->A*B*C, D*B*C
 ans  =
    69.    21.  - 94.  - 7.
  - 7.     2.     29.  - 43.
 ans  =
  - 67.  - 25.    64.    25.
  - 21.    3.     80.  - 58.
```

3. Voici les instructions pour calculer $(A+D)C$, B^{-1}, ${}^tD$, ${}^tCB$ et ${}^tAD$:

```
-->(A+D)*C, inv(B), D', C'*B, A'*D
 ans  =
    22.    10.  - 8.  - 2.
    6.     3.   - 7.  - 37.
 ans  =
    0.1111111111111  - 0.1111111111111    0.1111111111111
  - 0.5555555555556  - 1.4444444444444  - 1.5555555555556
    0.4444444444444    0.5555555555556    0.4444444444444
 ans  =
  - 2.    3.
    1.  - 4.
    4.    2.
 ans  =
  - 9.   - 4.  - 5.
  - 5.   - 1.    0.
  - 6.     7.    17.
  - 17.    1.    1.
 ans  =
    8.   - 14.    16.
    0.   - 5.     16.
    19.  - 22.    2.
```

Exercice 2 1. On définit les matrices sur Scilab:

```
-->A=[2 -1 2;5 -3 3;-1 0 -2];
-->I=eye(3,3);
```

2. On calcule $(I+A)^3$:

```
-->(I+A)^3
 ans  =

    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
```

On obtient $(I+A)^3 = 0$.

3. On a donc, comme les matrices I et A commutent pour le produit matriciel:

$$0 = (I+A)^3 = I^3 \times A^0 + 3I^2 \times A + 3I \times A^2 + I^0 \times A^3 = I + 3A + 3A^2 + A^3.$$

Donc $-A^3 - 3A^2 - 3A = I$. En factorisant par A, on obtient $A(-A^2 - 3A - 3I) = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I$.

4. Avec Scilab:

```
-->-A^2-3*A-3*I, inv(A)
 ans  =
  - 6.    2.  - 3.
  - 7.    2.  - 4.
    3.  - 1.    1.
 ans  =
  - 6.    2.  - 3.
  - 7.    2.  - 4.
    3.  - 1.    1.
```

On a donc bien $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I$.

Exercice 3 1. On définit les matrices sur Scilab:

```
-->A=ones(3,3); B=[0 -1 1;1 0 -1;-1 1 0];
```

2. On calcule $A * B$ et $B * A$ avec Scilab:

```
-->A*B, B*A
 ans  =
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
 ans  =
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
```

3. Comme $AB = BA = 0$, les matrices A et B commutent et on peut appliquer la formule du binôme de Newton:

$$\begin{aligned} M^n &= (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = A^0 B^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} + A^n B^0 \\ &= B^n + AB \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^{k-1} B^{n-k-1} + A^n = B^n + 0 \times \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A^{k-1} B^{n-k-1} + A^n \\ &= A^n + B^n. \end{aligned}$$

On aurait aussi pu faire une démonstration par récurrence.

4. On calcule A^2, A^3 et A^4 avec Scilab:

```
-->A^2, A^3, A^4
 ans  =
    3.    3.    3.
    3.    3.    3.
    3.    3.    3.
 ans  =
    9.    9.    9.
    9.    9.    9.
    9.    9.    9.
 ans  =
    27.    27.    27.
    27.    27.    27.
    27.    27.    27.
```

Notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété $A^k = 3^{k-1}A$ et montrons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

Initialisation: $A^1 = A$ et $3^{1-1}A = 3^0 A = A$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité: Supposons qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vérifiée.

$$A^{k+1} = A^k \times A = 3^{k-1}A \times A = 3^{k-1} \times 3A = 3^k A,$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence, on a: $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 3^{k-1}A$.

5. On calcule B^2, B^3, B^4, B^5 et B^6 avec Scilab:

```
-->B^2, B^3, B^4, B^5, B^6
 ans  =
  - 2.    1.    1.
    1.  - 2.    1.
    1.    1.  - 2.
 ans  =
    0.    3.  - 3.
  - 3.    0.    3.
    3.  - 3.    0.
 ans  =
    6.  - 3.  - 3.
  - 3.    6.  - 3.
  - 3.  - 3.    6.
 ans  =
    0.  - 9.    9.
    9.    0.  - 9.
  - 9.    9.    0.
 ans  =
  - 18.    9.      9.
    9.   - 18.     9.
    9.     9.   - 18.
```

Notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété:

$$B^{2k} = \begin{pmatrix} -2\times(-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} \\ (-3)^{k-1} & -2\times(-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} \\ (-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} & -2\times(-3)^{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & -(-3)^k \\ -(-3)^k & (-3)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geq 1$.

Initialisation: $B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times(-3)^{1-1} & (-3)^{1-1} & (-3)^{1-1} \\ (-3)^{1-1} & -2\times(-3)^{1-1} & (-3)^{1-1} \\ (-3)^{1-1} & (-3)^{1-1} & -2\times(-3)^{1-1} \end{pmatrix}$.

$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^1 & (-3)^1 \\ (-3)^1 & 0 & -(-3)^1 \\ -(-3)^1 & (-3)^1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité: Supposons qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vérifiée.

En utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité:

$$\begin{aligned}
B^{2k+2} &= B \times B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & -(-3)^k \\ -(-3)^k & (-3)^k & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\times(-3)^k & (-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & -2\times(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & (-3)^k & -2\times(-3)^k \end{pmatrix}, \\
B^{2k+3} &= B \times B^{2k+2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\times(-3)^k & (-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & -2\times(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & (-3)^k & -2\times(-3)^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^{k+1} & (-3)^{k+1} \\ (-3)^{k+1} & 0 & -(-3)^{k+1} \\ -(-3)^{k+1} & (-3)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence, on a: $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$,

$$B^{2k} = \begin{pmatrix} -2\times(-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} \\ (-3)^{k-1} & -2\times(-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} \\ (-3)^{k-1} & (-3)^{k-1} & -2\times(-3)^{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & -(-3)^k \\ -(-3)^k & (-3)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

6. On a donc, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
M^{2k} &= \begin{pmatrix} 3^{2k-1} - 2\times(-3)^{k-1} & 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} & 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} \\ 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} & 3^{2k-1} - 2\times(-3)^{k-1} & 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} \\ 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} & 3^{2k-1} + (-3)^{k-1} & 3^{2k-1} - 2\times(-3)^{k-1} \end{pmatrix}, \\
M^{2k+1} &= \begin{pmatrix} 3^{2k} & 3^{2k} - (-3)^k & 3^{2k} + (-3)^k \\ 3^{2k} + (-3)^k & 3^{2k} & 3^{2k} - (-3)^k \\ 3^{2k} - (-3)^k & 3^{2k} + (-3)^k & 3^{2k} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. On définit la matrice A sur Scilab et on calcule $B = A - 3I$:

```
-->A=[5 1 0;-3 2 1;1 0 2]; B=A-3*eye(3,3)
 B  =
    2.    1.    0.
  - 3.  - 1.    1.
    1.    0.  - 1.
```

2. On calcule B^2 et B^3 avec Scilab:

```
-->B^2, B^3
 ans  =
    1.    1.    1.
  - 2.  - 2.  - 2.
    1.    1.    1.
 ans  =
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
```

Donc, pour tout $k \geq 3$, $B^k = 0$.

3. Comme B et $3I$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton:

$$\begin{aligned}
A^n &= (3I+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I)^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k \\
&= \binom{n}{0} 3^n B^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} B^1 + \binom{n}{2} 3^{n-2} B^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k \\
&= 3^n I + n3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2.
\end{aligned}$$

Exercice 5 1. Voici la procédure pour calculer la transposée d'une matrice:

```
A=input('Donner une matrice A: ')
[n,p]=size(A)
B=zeros(p,n)
for i=1:n do
    for j=1:p do
        B(j,i)=A(i,j)
    end
end
disp(B)
```

Par exemple:

```
-->exec('C:\TP\TP9\tp9-exo1.sce', -1)
Donner une matrice A: [1 2 3;4 5 6]
    1.    4.
    2.    5.
    3.    6.
```

2. Voici la procédure pour construire une matrice diagonale:

```
L=input('Donner un vecteur ligne: ')
n=length(L)
A=zeros(n,n)
for i=1:n do
    A(i,i)=L(i)
end
disp(A)
```

Alors, par exemple:

```
-->exec('C:\TP9\diagonale.sce', -1)
Donner un vecteur ligne: [1 2 3]
    1.    0.    0.
    0.    2.    0.
    0.    0.    3.
```

3. La procédure suivante permet de calculer le produit de deux matrices:

```
function C=ProduitMatriciel(A,B)
    [n,p]=size(A)
    [q,r]=size(B)
    if p==q then
        C=zeros(n,r)
        for l=1:n do
            for c=1:r do
                for k=1:p do
                    C(l,c)=C(l,c)+A(l,k)*B(k,c)
                end
            end
        end
    else
        error('tailles de matrices incompatibles')
    end
endfunction
```

Par exemple:

```
-->exec('C:\TP9\produit.sce', -1)
-->ProduitMatriciel([1 2 3;4 5 6;7 8 9],diag([1 2 3]))
 ans  =
    1.    4.     9.
    4.    10.    18.
    7.    16.    27.
```