

Correction du TP2

Les boucles for...do...end

Exercice 1 1. On teste les instructions par exemple pour $n = 5$ ou $n = 10$:

```
-->exec('C:\TP3.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
15.
-->exec('C:\TP3.sce', -1)
Donner une valeur de n: 10
55.
```

La valeur de S à la fin de la boucle correspond à la somme $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (avec la formule sur les sommes usuelles). Vérifions que le résultat donné par Scilab est le bon:

```
-->(5*(5+1))/2, (10*(10+1))/2
ans =
15.
ans =
55.
```

2. • Voici les instructions pour calculer les trois premières sommes:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for k=1:n do
    S=S+k^2
end
disp(S)
```

On teste les instructions pour $n = 5$, pour $n = 10$ et pour $n = 20$:

```
-->exec('C:\exo1a.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
55.
-->exec('C:\exo1a.sce', -1)
Donner une valeur de n: 10
385.
-->exec('C:\exo1a.sce', -1)
Donner une valeur de n: 20
2870.
```

La valeur de S à la fin de la boucle correspond à la somme $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (avec la formule sur les sommes usuelles). Vérifions que le résultat donné par Scilab est le bon:

```
-->(5*(5+1)*(2*5+1))/6, (10*(10+1)*(2*10+1))/6, (20*(20+1)*(2*20+1))/6
ans =
55.
ans =
385.
ans =
2870.
```

• Voici les instructions pour calculer les deux dernières sommes:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for k=1:n do
    S=S+k^3
end
disp(S)
```

On teste les instructions pour $n = 5$ et pour $n = 10$:

```
-->exec('C:\exo1b.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
225.
-->exec('C:\exo1b.sce', -1)
Donner une valeur de n: 10
3025.
```

La valeur de S à la fin de la boucle correspond à la somme $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (avec la formule sur les sommes usuelles). Vérifions que le résultat donné par Scilab est le bon:

```
-->(5^2*(5+1)^2)/4, (10^2*(10+1)^2)/4
ans =
225.
ans =
3025.
```

Exercice 2 1. Voici les instructions pour calculer la somme S_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for k=0:n do
    S=S+k^2+4*k+4
end
disp(S)
```

2. En utilisant la linéarité de la somme, on a:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (k^2 + 4k + 4) = \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} + 4(n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + 2n + 4 \right) = \frac{n+1}{6} (2n^2 + n + 12n + 24) = \frac{(n+1)(2n^2 + 13n + 24)}{6}. \end{aligned}$$

3. En utilisant une identité remarquable, on a:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (k^2 + 4k + 4) = \sum_{k=0}^n (k+2)^2.$$

On effectue un changement d'indice: On pose $i = k + 2$. Comme k parcourt les entiers entre 0 et n , i parcourt les entiers entre 2 et $n+2$. Alors:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=2}^{n+2} i^2 = \sum_{i=1}^{n+2} i^2 - 1 = \frac{(n+2)(n+2+1)(2(n+2)+1)}{6} - 1 = \frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{6} - 1 \\ &= \frac{2n^3 + 15n^2 + 39n + 30 - 6}{6} = \frac{2n^3 + 15n^2 + 39n + 24}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 13n + 24)}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 3 1. Voici les instructions pour calculer S_n et T_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
for k=1:n do
    S=S+(2*k+1)/(k^2*(k+1)^2)
end
T=(n*(n+2))/(n+1)^2
disp(S,T)
```

2. On teste pour $n = 5, 10, 20$:

```
-->exec('C:\exo2.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
0.97222222222222
0.97222222222222
-->exec('C:\exo2.sce', -1)
Donner une valeur de n: 10
0.9917355371901
0.9917355371901
-->exec('C:\exo2.sce', -1)
Donner une valeur de n: 20
0.9977324263039
0.9977324263039
```

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = T_n$.

3. Soit k un entier naturel non nul. Alors

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{((k+1)+k)((k+1)-k)}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

4. On a alors:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Exercice 4 1. Pour calculer $n!$, on utilise la suite d'instructions suivante:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
P=1
for k=1:n do
    P=P*k
end
disp(P)
```

2. • Voici les instructions pour calculer les deux premiers produits:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
P=1
for k=1:n do
    P=P*(2^(2*k))/(3^k)
end
disp(P)
```

On teste les instructions pour $n = 5$ et pour $n = 10$:

```
-->exec('C:\exo3b.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
74.830913880758
-->exec('C:\exo3b.sce', -1)
Donner une valeur de n: 10
7440986.4459968
```

Calculons le produit $\prod_{k=1}^n \frac{2^{2k}}{3^k}$ à la main:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2^{2k}}{3^k} = \frac{\prod_{k=1}^n 2^{2k}}{\prod_{k=1}^n 3^k} = \frac{2^{2 \times \sum_{k=1}^n k}}{3^{\sum_{k=1}^n k}} = \frac{2^{2 \times \frac{n(n+1)}{2}}}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{2^{n(n+1)}}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \left(\frac{2}{3^{\frac{1}{2}}} \right)^{n(n+1)}.$$

On vérifie avec Scilab qu'on obtient bien les résultats obtenus précédemment pour $n = 5$ et $n = 10$:

```
-->(2/sqrt(3))^(5*(5+1))
ans =
    74.830913880758
-->(2/sqrt(3))^(10*(10+1))
ans =
    7440986.4459968
```

- Voici les instructions pour calculer les deux derniers produits:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
P=1
for k=2:n do
    P=P*(1-1/k^2)
end
disp(P)
```

On teste les instructions pour $n = 5$ et pour $n = 10$:

```
-->exec('C:\exo3c.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
    0.6
-->exec('C:\exo3c.sce', -1)
Donner une valeur de n: 10
    0.55
```

Calculons le produit $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ à la main:

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\ &= \frac{1 \times 3}{2^2} \times \frac{2 \times 4}{3^2} \times \frac{3 \times 5}{4^2} \times \dots \times \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

On vérifie avec Scilab qu'on obtient bien les résultats obtenus précédemment pour $n = 5$ et $n = 10$:

```
-->(5+1)/(2*5)
ans =
    0.6
-->(10+1)/(2*10)
ans =
    0.55
```