Correction du TP7

# Calcul des termes d'une suite réelle

**Exercice 1** 1. Pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

```
-->function res=a(n); res=(n^2+3+ln(n))/(exp(n)+sqrt(n^4+n^2)); endfunction
-->a(10), a(100), a(1000)
 ans  =
    1.0477994105884
 ans  =
    1.0007104827453
 ans  =
    1.0000094077507
```

On remarque que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers 1. Ceci est en effet le cas:

$$a_n = \frac{n^2+3+\ln(n)}{e^{-n}+\sqrt{n^4+n^2}} = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{e^{-n}}{n^2}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1+\frac{3}{n^2}+\frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{e^{-n}}{n^2}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

2. Pour la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

```
-->function res=b(n); res=sqrt(n^2+2*n)-sqrt(2*n^2+1); endfunction
-->b(10), b(100), b(1000)
 ans  =
  - 3.2229957286545
 ans  =
  - 40.429842343402
 ans  =
  - 413.21441542707
```

On remarque que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble diverger vers $-\infty$. Ceci est en effet le cas:

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2n^2+1} = \frac{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2n^2+1})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{2n^2+1})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{2n^2+1}} \\ &= \frac{n^2+2n-2n^2-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{2n^2+1}} = \frac{-n^2+2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{2n^2+1}} = \frac{n^2\left(-1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}\right)} \\ &= n\times\frac{-1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} -1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}=-1$ et $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}=1$, on a, par produit, $\lim_{n\to+\infty} b_n=-\infty$.

3. Pour la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

```
-->function res=c(n); res=(1/2)*ln(n^2+sqrt(n)+1)-ln(n-sqrt(n)+1); endfunction
-->c(10), c(100), c(1000)
 ans  =
    0.2640267483039
 ans  =
    0.0948603771929
 ans  =
    0.0311177625351
```

On remarque que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers 0. Ceci est en effet le cas:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\ln(n^2+\sqrt{n}+1)-\ln(n-\sqrt{n}+1)=\ln\left(\frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}+1}}{n-\sqrt{n}+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}}{n\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\right)}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}=1$, donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\ln(1)=0$.

---

**Exercice 2** 1. Voici la procédure pour calculer $v_n$:

```
function res=v(n)
    res=1
    for k=1:n do
        res=2*res
    end
endfunction
```

2. (a) $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0=1$. Donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=2^n\times 1=2^n$.
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$.

---

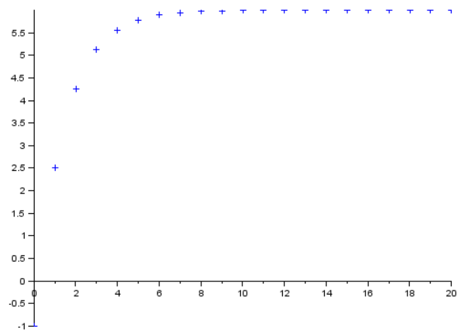
**Exercice 3** 1. Voici la procédure pour calculer $w_n$:

```
function res=w(n)
    res=-1
    for k=1:n do
        res=(1/2)*res+3
    end
endfunction
```

2. On réalise le tracé des 21 premières valeurs de la suite $(w_n)$ en utilisant l'instruction suivante:

```
-->plot(0:20,w,"+")
```

On obtient le résultat suivant:




La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers 6.

3. (a) $(w_n)$ est une suite arithmético-géométrique. On résout $x=\dfrac{1}{2}x+3$:

$$x=\frac{1}{2}x+3\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}x=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}x=3\Leftrightarrow x=6.$$

On considère la suite $(w_n - 6)$.

$$w_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}w_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}w_n - 3 = \frac{1}{2}(w_n - 6)$$

Donc $(w_n - 6)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 - 6 = -1 - 6 = -7$. Alors, pour tout entier naturel $n$,

$$w_n - 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-7) \text{ donc } w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (-7) + 6.$$

(b) Comme $\frac{1}{2} \in ]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} w_n = 6$.

---

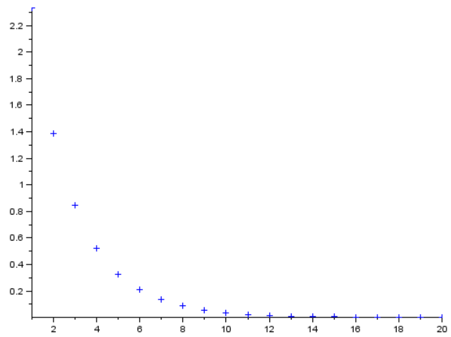
**Exercice 4** 1. Voici la procédure pour calculer $y_n$:

```
function res=y(n)
    if n==0 then
        res=4
    elseif n==1 then
        res=7/3
    else
        a=4
        b=7/3
        for k=2:n do
            res=(7/6)*b-(2/6)*a
            a=b
            b=res
        end
    end
endfunction
```

2. On réalise le tracé des 21 premières valeurs de la suite $(y_n)$ en utilisant l'instruction suivante:

```
-->plot(0:20,y,"+")
```

On obtient le résultat suivant:




La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers 0.

3. (a) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $6x^2 - 7x + 2 = 0$. On résout cette équation: $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 6 \times 2 = 1 > 0$ et on obtient deux racines $x_1 = \frac{7-1}{2\times 6} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{7+1}{2\times 6} = \frac{2}{3}$.

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de la forme: $y_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^n$, où $\lambda$ et $\mu$ sont des constantes à déterminer avec $y_0$ et $y_1$.

$$\begin{cases} y_0 = 4 = \lambda + \mu \\ y_1 = \frac{7}{3} = \frac{1}{2}\lambda + \frac{2}{3}\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ 2 \times \frac{2}{3}\mu - \mu = 2 \times \frac{7}{3} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 2$$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(b) Comme $\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \in ]-1,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Par somme des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

---

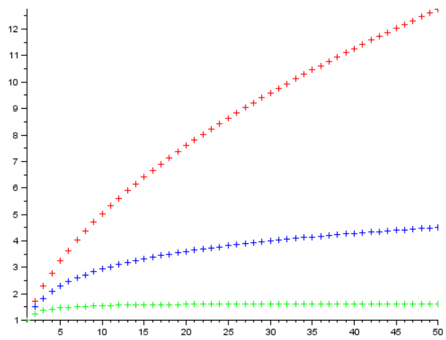
**Exercice 5** 1. Voici les trois procédure pour calculer $S_n$, $T_n$ et $U_n$:

```
function res=S(n)
    res=0
    for k=1:n do
        res=res+1/sqrt(k)
    end
endfunction

function res=T(n)
    res=0
    for k=1:n do
        res=res+1/k
    end
endfunction

function res=U(n)
    res=0
    for k=1:n do
        res=res+1/k^2
    end
endfunction
```

2. On réalise le tracé des 50 premières valeurs de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant l'instruction suivante:

```
-->plot(1:50,S,"r+"); plot(1:50,T,"b+"); plot(1:50,U,"g+");
```

On obtient le résultat suivant (où la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est représentée en rouge, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en bleu et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en vert):




Les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semblent diverger vers $+\infty$ alors que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger.