

Exercice 1. A partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k^3$, calculer :

$$a) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 \quad b) \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \quad c) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$$

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$, m et n deux entiers naturels.

1. A l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^{m+n}$ et $(1+x)^m \times (1+x)^n$.
2. En déduire la formule de Vandermonde :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in \llbracket 0; m+n \rrbracket, \binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}$$