

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^n \frac{2^k}{5^{2k}}, \quad \prod_{k=1}^n \frac{3^k}{5^{2n-k}}, \quad \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 2. 1. En étudiant les variations de la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$, montrer que, pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leq x$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 3. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 \leq 0$

2. $e^x + e^{1-x} > e + 1$

3. $x\sqrt{x} \leq (\sqrt{x})^x$

Correction

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{2^k}{5^{2k}} &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{2}{25}\right)^k \\ &= \left(\frac{2}{25}\right)^{\sum_{k=1}^n k} \\ &= \left(\frac{2}{25}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$