Exercice 1.

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2^k}{5^{2k}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{25}\right)^k = \left(\frac{2}{25}\right)^{\sum_{k=1}^{n} k} = \left(\frac{2}{25}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{3^k}{5^{2n-k}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{3^k}{5^{-k} \times 5^{2n}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{15^k}{5^{2n}} = \frac{15^{\frac{n(n+1)}{2}}}{5^{2n^2}}$$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k^2 - 2k + 1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{(k-1)^2}{k^2}\right) \text{ (télescopage)} = \frac{1}{n^2}$$

Exercice 2. *1. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et on a $\forall x \in]-1\,;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Comme pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $x+1 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de x. Donc f est strictement décroissante sur $]-1\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Donc $f(0) = 0$ est le minimum de f, c'est à dire, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$. Donc pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$ on a :*

$$\ln(1+x) \leqslant x$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \in]-1\,;+\infty[$. Donc, d'après 1) en posant $x = -\frac{1}{n}$, on a $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$, soit $1 - \frac{1}{n} \leqslant e^{-\frac{1}{n}}$.

Les deux membres de cette inégalité sont positifs, donc $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n$, soit $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{-1}$.

Cela donne

$$e \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \tag{1}$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in]-1\,;+\infty[$ et on a d'après 1), en posant $x = \frac{1}{n}$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$, soit $1 + \frac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}}$.

Les deux membres de cette inégalité sont positifs, donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n$. Cela donne

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \tag{2}$$

(1) et (2) donnent :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 3. *1. Pour $x \in]0\,;+\infty[$ on pose $X = \ln x$. On a alors*

$$\begin{aligned}
(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 \leqslant 0 &\Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow X \leqslant -2 \text{ ou } X \geqslant 1 \text{ (tableau de signes d'un trinôme)} \\
&\Leftrightarrow x \leqslant e^{-2} \text{ ou } x \geqslant e
\end{aligned}$$

Donc $S =]-\infty\,;e^{-2}] \cup [e\,;+\infty[$.

2. *En multipliant les deux membres de cette inégalité par* e^x *on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} > \mathrm{e}+1 &\Leftrightarrow (\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e} > (\mathrm{e}+1)\mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow X^2 + \mathrm{e} > (\mathrm{e}+1)X \ (X = \mathrm{e}^x) \\ &\Leftrightarrow X^2 - (\mathrm{e}+1)X + \mathrm{e} > 0 \end{aligned}$$

Or $\Delta = (\mathrm{e}+1)^2 - 4\mathrm{e}^2 < (\mathrm{e}+\mathrm{e})^2 - 4\mathrm{e}^2 = 0$. *Donc* $\forall x \in \mathbb{R},\ X^2 - (\mathrm{e}+1)X + \mathrm{e} > 0$. *Donc* $S = \mathbb{R}$.

3. *Pour tout* $x > 0$

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} \leqslant (\sqrt{x})^x &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x} \leqslant \mathrm{e}^{x \ln \sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x\ln x}{2}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x \leqslant \frac{x\ln x}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{x\ln x}{2} - \sqrt{x}\ln x \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant (\frac{\sqrt{x}}{2} - 1)\sqrt{x}\ln x \end{aligned}$$

Comme $\sqrt{x} > 0$, *on a*

$$x^{\sqrt{x}} \leqslant (\sqrt{x})^x \Leftrightarrow 0 \leqslant (\frac{\sqrt{x}}{2} - 1)\ln x.$$

En utilisant un tableau de signes on obtient $S =]0\,;1] \cup [4\,;+\infty[$.