Exercice 1. *1. f n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$. f n'est pas surjective car f est à valeurs positives, donc -1 n'a pas d'antécédent. f n'est donc pas bijective.*

2. g n'est pas injective car $g(-1) = g(1)$. g n'est pas surjective car g est à valeurs dans $[1\,;+\infty[$ puisque $x \geqslant 0$ implique $|x| + 1 \geqslant 1$ et en particulier 0 n'a pas d'antécédent. g n'est donc pas bijective.

3. Montrons que h est injective. En effet,

$$\begin{aligned} h(x) = h(x') &\Rightarrow \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x'+3}{x'+1} \\ &\Rightarrow (2x+3)(x'+1) = (2x'+3)(x+1) \\ &\Rightarrow 2xx' + 2x + 3x' + 3 = 2xx' + 2x' + 3x + 3 \\ &\Rightarrow \cancel{2xx'} + 2x + 3x' + \cancel{3} = \cancel{2xx'} + 2x' + 3x + \cancel{3} \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

Donc h est injective.
Montrons que h n'est pas surjective. Effet, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} 2 < 3 &\Rightarrow x + 2 < x + 3 \\ &\Rightarrow \frac{x+2}{x+2} < \frac{x+3}{x+1} \\ &\Rightarrow 1 < \frac{x+3}{x+1} \end{aligned}$$

Cela montre que les éléments de $[0\,;1]$ n'ont pas d'antécédent par h. Donc h n'est pas surjective.

Remarque . On pourrait répondre à 3) en étudiant les variations de h.

Exercice 2. *Soient $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

1. (a) On a

k	0	1	2	3	$\cdots$
$f(k)$	0	2	4	6	$\cdots$

et

k	0	1	2	3	$\cdots$
$g(k)$	0	0	1	1	$\cdots$

f est injective car $\forall (k,\ k') \in \mathbb{N}^2,\ f(k) = f(k') \Rightarrow 2k = 2k' \Rightarrow k = k'$
mais non surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédent par f.
g est surjective car pour tout $y \in \mathbb{N}$, $g(2y) = y$ mais non injective car $g(0) = g(1)$

2. D'une part $(g \circ f)(k) = k$ donc $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$. Donc $g \circ f$ est bijective.
D'autre part

$$\forall k \in \mathbb{N}, f \circ g(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair} \\ k-1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

$f \circ g$ n'est pas injective car $f \circ g(0) = f \circ g(1)$ et n'est pas surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédent.