Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. *Chaque question peut être traitée indépendamment des autres.*

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :*
$$x|x+1| - x^2|x-1| = 0.$$
2. *Simplifier :*
$$A = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}}$$
3. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel* $n \geqslant 6$ *on a* $2^n \geqslant (n+1)^2$
4. *Soit* n *un entier naturel non nul. Calculer :*
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(3^k - 3k\right)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right)$
   (b) *Proposer un programme sous scialab, qui demande à l'utilisateur de saisir un entier naturel non nul* n*, puis calcule et affiche le résultat de la somme*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+\mathrm{e}}{\sqrt{k^2+1+\pi}}$$

Exercice 2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Question préliminaire : soit* $k \in \mathbb{N}^*$*. Simplifier les quantités suivantes :*
   (a) $(k+1)k!$ *(b)* $(k+2)(k+1)k!$
2. *On considère la somme* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$.
   (a) *Montrer que* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!)$.
   (b) *En déduire que* $S_n = (n+1)! - 1$.
3. *On considère la somme* $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2+1) \times k!$.
   (a) *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$*. Justifier que* $k^2+1 = (k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1 - k$.
   (b) *En utilisant la décomposition précédente et la linéarité de la somme, montrer que :*
$$T_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)! - 2\sum_{k=1}^{n}(k+1)! + \sum_{k=1}^{n} k! - S_n.$$
   (c) *En remarquant une propriété téléscopique sur les trois premières sommes, montrer que*
$$T_n = (n+2)! - (n+1)! - 1 - S_n.$$
   (d) *Simplifier le résultat précédent pour obtenir* $T_n = (n+1)!n$.
4. *Redémontrer le résultat de la question précédente par récurrence pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. *Chaque question peut être traitée indépendamment des autres.*

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer les premières puissances de* A *(à partir de 2) et en déduire une conjecture pour l'expression de* A^n, *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.
   Démontrer ce résultat par récurrence.

2. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) *Justifier que* $B = 2I_3 + N$ *où* N *est une matrice vérifiant* $N^3 = 0_3$, *la matrice carrée nulle de dimension 3.*
   (b) *En déduire, l'expression de* B^n *pour* n *entier naturel supérieur ou égal à 2. Vérifier que cette formulle est également valable pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3. *Soit* $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) *Vérifier que* P *est inversible et calculer son inverse.*
   (b) *Montrer que la matrice* $D = P^{-1}CP$ *est égale à* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (c) *Montrer par récurrence que* $C^k = PD^kP^{-1}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.
   (d) *Calculer* D^k *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *et en déduire que* $C^k = \begin{pmatrix} 2-2^k & 1-2^k \\ 2^{k+1}-2 & 2^{k+1}-1 \end{pmatrix}$.
   (e) *On donne* $2^{11} = 2048$. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} C^k$.

Exercice 4 (Autour des matrices inversibles)**.** *Soit* $p \in \mathbb{N}$ *et* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *tel que* $(A - 2I_p)^3 = 0_p$ *avec* $A \neq 2I_p$.

1. *Justifier que* $A - 2I_p$ *n'est pas inversible (on pourra distinguer les cas* $(A-2I_p)^2 = 0_p$ *et* $(A-2I_p)^2 \neq 0_p$*).*
2. *Justifier que* A *est inversible et que son inverse vaut* $\frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I_p$.

Exercice 5 (Matrices et coefficients indéterminés)**.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$, *où* a, b *et* c *sont des nombres réels.*
Donner toutes les valeurs possibles de a, b *et de* c *telles que :*
1. $A^2 = I_3$ *2.* $A^2 = A$

Exercice 6. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 = 0_3$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, *on définit la matrice* $E(t)$ *par* $E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$

1. *Montrer que :* $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)E(t') = E(t + t')$
2. *Calculer* $E(t)E(-t)$. *En déduire que la matrice* $E(t)$ *est inversible et déterminer son inverse en fonction de* I, A, A^2, t.
3. *Exprimer* $E(2t)$, $E(3t)$, $E(4t)$, $E(5t)$ *en fonction de* $E(t)$. *Quelle formule peut-on conjecturer ? Démontrer cette formule.*
   En déduire l'expression de $[E(t)]^n$ *en fonction de* I, A, A^2, t *et* n.