Devoir surveillé n° 1

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![n+1\,;2n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}$.
2. (a) Soit n un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_n$ des éléments de $[0\,;1]$.
      i. Pour $x \in [0\,;1]$, quel est le signe de $x(1-x)$?
      ii. Montrer que si $x_1 + \cdots + x_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, alors $x_1 \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.
   (b) Soit n un entier naturel non nul et $x_0, \dots, x_n$ des éléments de $]0\,;1]$ tels que $x_0 < \ldots < x_n$.
   On veut montrer qu'Il existe $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $x_{i+1} - x_i < \frac{1}{n}$.
   Par l'absude, on supposons que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ on a $x_{i+1} - x_i \geqslant \frac{1}{n}$.
      i. Montrer $x_n - x_0 \geqslant 1$.
      ii. Conclure.

Exercice 2

Soit n un entier non nul.

1. Calculer :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{2k-1}}{2^{3k+2} \times 9^{k+2}} \quad b)\ \sum_{k=n}^{2n} k(k-2) \quad c)\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k(k+2))}{(k+1)(k+3)}\right)$$

2. Calculer :

$$a)\ \prod_{k=1}^{n} \frac{2 \times 3^{2k-1}}{9^{k+2}} \quad b)\ \prod_{k=n}^{2n} (2k+1) \quad c)\ \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$

3. Calculer :

$$\text{a)} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2022 \qquad \text{b)} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^3 \qquad \text{c)} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)$$
$$\text{d)} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 \qquad \text{e)} \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} \qquad \text{f)} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$$

Exercice 3

1. Soit n un entier naturel non nul. Calculer

$$I = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \quad J = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \quad K = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k\binom{n}{k}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ $k = (k+1) - 1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel, fixé.
   (a) Soit $p \in [\![0, n]\!]$. En utilisant la formule de Pascal, montrez que $\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix}$ peut s'écrire sous la forme $a_{k+1} - a_k$. Déduisez-en que
   $$\sum_{k=p}^{n} \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}.$$
   (b) Déterminez des entiers a et b tels que $k^2 = a\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$. En utilisant 3)(a), déduisez-en la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

•

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Question préliminaire : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les quantités suivantes :
   (a) $(k+1)k!$ (b) $(k+2)(k+1)k!$
2. On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$.
   (a) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}((k+1)! - k!)$.
   (b) En déduire que $S_n = (n+1)! - 1$.
3. On considère la somme $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1) \times k!$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $k^2 + 1 = (k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1 - k$.
   (b) En utilisant la décomposition précédente et la linéarité de la somme, montrer que :
   $$T_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)! - 2\sum_{k=1}^{n}(k+1)! + \sum_{k=1}^{n} k! - S_n.$$
   (c) En remarquant une propriété téléscopique sur les trois premières sommes, montrer que
   $$T_n = (n+2)! - (n+1)! - 1 - S_n.$$
   (d) Simplifier le résultat précédent pour obtenir $T_n = (n+1)!n$.
4. Redémontrer le résultat de la question précédente par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$.