Devoir surveillé n° 1

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. *Chaque question peut être traitée indépendamment des autres.*

1. *Donner les négations des propositions suivantes :*
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0$ *et* $x^2 \geqslant 0$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1\ \Rightarrow x^2 \in [2\,;+\infty[$.
2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :*
   (a) $\sqrt{x^2+1} < x+1$.
   (b) $|3x-1| \leqslant |x-3|$.
   (c) $|x^2-1| < 2x^2-3x+1$.
3. *Simplifier :*
$$A = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{9-6\sqrt{3}}, \qquad B = \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}$$
4. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel* $n \geqslant 3$ *on a* $4^n \geqslant (2n+1)^2$.
5. *Soit* $n > 1$ *un entier naturel. Calculer :*
   (a) $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{3^{2k}}{5^k}, \quad T = \sum_{k=2}^{n} \left((2k+1)(k^2-1)\right), \quad U = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+2k+1}\right)$
   (b) *Proposer un programme sous Scilab, qui demande à l'utilisateur de saisir un entier naturel non nul* n*, puis calcule et affiche le résultat de la somme*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+\mathrm{e}}{\sqrt{k^2+1+\pi}}$$

Exercice 2. *Chaque question peut être traitée indépendamment des autres.*

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que* A *est inversible et calculer son inverse.*
2. *Soit* A *une matrice carrée non nulle. Supposons que* $A^{2016} = 0$. *Montrer que* A *n' est pas inversible.*
3. *Soit* M *la matrice définie par* $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *et soit* J *la matrice définie par* $J = M - 5I_3$.
   (a) *Calculer* J, J^2 *et* J^3.
   En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, J^k
   (b) *A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer* M^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Exercice 3. *Soient* a, b *et* c *trois réels donnés. On pose* $a^2+b^2+c^2 = s$ *et on suppose* $s \neq 0$.
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) *Justifier que* A *n'est pas la matrice nulle.*
   (b) *Calculer* M^2 *et* M^3.
   (c) *Justifier par le calcul que* $M^3 = -sM$.
2. (a) *Montrer que si* M *est inversible alors* $M^2 + sI_3 = 0$
   (b) *Montrer que l'hypothèse "*M *est inversible" conduit à une contradiction.*
   (c) *Conclure.*

Exercice 4. *Soit A, J et I les trois matrices carrées d'ordre 2 définies par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer deux réels a et b tels que $A = aJ + bI$.*
2. *Calculer J^2 en fonction de J.*
3. *À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :*

$$A^n = (-2)^n I + \frac{1}{2}\left[4^n - (-2)^n\right] J$$

4. *Donner l'expression explicite de A^n sous forme d'une matrice d'ordre 2.*

PROBLEME

PREMIERE PARTIE : étude de la matrice A

1. *On pose*

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) *En utilisant la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.*

   (b) *On admet que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.*
   Justifier l'égalité : $P^{-1}AP = D$;

   (c) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.*

   (d) *En déduire l'expression de A^n en fonction de n.*

   (e) *Montrer qu'une matrice Δ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $\Delta D = D\Delta$ si et seulement Δ est diagonale.*

DEUXIEME PARTIE : résolution dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation du second degré : $X^2 = A$

On se propose dans cette partie de déterminer toutes les matrices X de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$X^2 = A$$

1. *On considère $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $X^2 = A$; on pose $Y = P^{-1}XP$.*
   Vérifier que $Y^2 = D$; montrer que $YD = DY$, puis établir que Y est de la forme :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma' \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \gamma \in \{-1, 1\} \text{ et } \gamma' \in \{-1, 1\}.$$

   En déduire la forme de la matrice X puis montrer, sans calculer explicitement les coefficients de X^2, qu'une telle matrice X vérifie bien : $X^2 = A$.

2. *Quel est le nombre m de solutions dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation du second degré $X^2 = A$?*

TROISIEME PARTIE : ensemble des matrices qui commutent avec A

Dans cette partie on se propose de déterminer la forme des matrices matrices M telles que $AM = MA$.

1. *Montrer que $AM = MA$ si et seulement $P^{-1}MP$ est diagonale.*
2. *En déduire que les matrices M qui commuttent avec A sont de la forme :*

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \qquad (1)$$

   où M_1, M_2 et M_3 sont trois matrices que l'on déterminera.