Correction du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1. 1. *On a*

$$\begin{aligned} x|x+1| - x^2|x-1| = 0 &\Leftrightarrow x(|x+1| - x|x-1|) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } |x+1| - x|x-1| = 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre dans l'équation $|x+1| - x|x-1| = 0$ on utilise le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\|x+1\|$	$-x-1$	0 $x+1$		$x+1$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	0	$x-1$
$\|x+1\| - x\|x-1\|$	$x^2 - 2x + 1$	$x^2 + 1$		$-x^2 + 2x + 1$

Sur $]-\infty\,;-1]$, on résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$.
$\Delta = 8$, $x_1 = 1 - \sqrt{2} \notin]-\infty\,;-1]$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2} \notin]-\infty\,;-1]$. Donc $x^2 - 2x + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty\,;-1]$
Sur $]-1\,;1]$, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution car $x^2 + 1 > 0$.
Sur $]1\,;+\infty]$, l'équation $-x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont celles du premier cas $x_1 = 1 - \sqrt{2} \notin]-\infty\,;-1]$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2} \in]1\,;+\infty]$. Donc $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ est l'unique solution de $-x^2 + 2x - 1 = 0$ dans $]1\,;+\infty]$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation $x|x+1| - x^2|x-1| = 0$ est $S = \{0;\ 1 + \sqrt{2}\}$.

2. *On a*

$$\begin{aligned} A =& \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6}}} \\ =& \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})}{(5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})}} \\ =& \sqrt{(5 + 2\sqrt{6})^2} \\ =& 5 + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

3. *Soit $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \geqslant (n+1)^2$ ».*
On a $2^6 = 64$ et $(6+1)^2 = 49$ donc $\mathcal{P}(6)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 6$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on veut démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que $2^{n+1} \geqslant (n+2)^2$.
En effet, $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geqslant 2 \times (n+1)^2$. Or $2(n+1)^2 - (n+2)^2 = 2\left(n^2 + 2n + 1\right) - \left(n^2 + 4n + 4\right) = n^2 - 2$ qui est bien positif dès que $n \geqslant 2$, c'est à dire, $2(n+1)^2 > (n+2)^2$. D'où $2^{n+1} \geqslant (n+2)^2$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 6$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

4. *Soit n un entier naturel non nul. Calculer :*
   (a) *On a*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(3^k - 3k\right) =& \sum_{k=1}^{n} 3^k - \sum_{k=1}^{n} 3k \\ =& 3 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1} - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ =& \frac{3}{2}(3^n - 1 - n(n+1)) \\ =& \frac{3}{2}(3^n - n^2 - n - 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k^2+2k+1}{k^2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(k+1)^2}{k^2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)^2-\ln k^2\right) \text{ (somme téléscopique)}\\ &= \ln(n+1)^2-\ln 1^2\\ &= 2\ln(n+1)\end{aligned}$$

(b) *n=input ('Donner une valeur non nulle de n : ')*
S=0
for k=1 :n
*S=S+(2*k+%e)/(sqrt(kˆ 2+1+% pi)*
end
disp (S)

Exercice 2. *Soit* $n \in \mathbb{N}*$.

1. *Il n'y a rien à justifier ici, ça a été fait à de multiples reprises en classe. Si on ne voit pas, il faut se forcer à passer par les pointillés. (a)* $(k+1)k! =$ *(k+1) ! (b)* $(k+2)(k+1)k! = (k+2)!$

2. *On considère la somme* $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$.

   (a) *On a, en suivant l'indication, en développant par linéarité puis en utilisant la première question préliminaire :* $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)k! - \sum_{k=1}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$.

   (b) *C'est une somme téléscopique. Si on choisit de la traiter par les pointillés, on obtient :*
   $S_n = (2!+3!+\cdots+n!+(n+1)!) - (1!+2!+\cdots+n!) = (n+1)!-1$.
   Si on veut utiliser un changement d'indice, on écrit :
   $$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} k! - \sum_{k=1}^{n} k! = \left(\sum_{k=2}^{n} k! + (n+1)!\right) - \left(1! + \sum_{k=2}^{n}\right) = (n+1)!-1.$$

3. *On considère la somme* $T_n = \sum_{k=1}^{n}(k^2+1) \times k!$.

   (a) *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. $(k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1 - k = k^2 + k + 2k + 2 - 2k - 2 + 1 - k = k^2 + 1$.

   (b) $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left((k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1 - k\right) \times k! =$ *donc, par linéarité :*
   $T_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+1)k! - 2\sum_{k=1}^{n}(k+1)k! + \sum_{k=1}^{n} k! - \sum_{k=1}^{n} k \times k!$ *et on obtient le résultat demandé en utilisant les deux questions préliminaires.*

   (c) *(+ la simplification de la question suivante) Ici, il faut considérer les trois premières sommes simultanément pour voir le téléscopage. Je corrige avec changements d'indice sur les deux premières sommes mais on peut aussi le faire via les pointillés.*
   $T_n = \sum_{k=3}^{n+2} k! - 2\sum_{k=2}^{n+1} k! + \sum_{k=1}^{n} k! - S_n$
   $= \left(\sum_{k=3}^{n} k! + (n+1)! + (n+2)!\right) - 2\left(2! + \sum_{k=3}^{n} k! + (n+1)!\right) + \left(1! + 2! + \sum_{k=1}^{n} k!\right) - ((n+1)!-1)$
   $= (n+1)! + (n+2)! - 2\times 2 - 2(n+1)! + 1 + 2 - (n+1)! + 1 = (n+2)! - 2(n+1)!$
   $= (n+2)(n+1)! - 2(n+1)! = (n+2-2)(n+1)! = n(n+1)!$.

4. *Pour* $n=1$ *la propriété est vraie car* $1(1+1)! = 2$ *et* $\sum_{k=1}^{1}(k^2+1)\times k! = \left(1^2+1\right)1! = 2$. *Supposons que la propriété soit vraie au rang* $n \geqslant 1$ *et démontrons alors qu'elle est vraie au rang* $n+1$*, c'est à dire que* $T_{n+1} = (n+1)(n+2)!$
   $T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(k^2+1)\times k! = \sum_{k=1}^{n}(k^2+1)\times k! + \left(\left((n+1)^2+1\right)(n+1)!\right)$
   Par hypothèse de récurrence et en développant le dernier terme, on a :

$T_{n+1} = n(n+1)! + \left(n^2+2n+2\right)(n+1)! = (n+1)!\left(n^2+3n+2\right)$.
D'autre part, $(n+1)(n+2)! = (n+1)(n+2)(n+1)! = \left(n^2+3n+2\right)\right)(n+1)!$.
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ *et on peut conclure qu'elle est alors vraie pour tout entier non nul.*

Exercice 3. *1. On trouve* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *ce qui conduit à la conjecture suivante :*
$\mathcal{P}(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ », *qui se démontre par récurrence. En effet, pour* $n=0$, *on trouve bien* I_3 *en calculant les deux termes qui composent l'égalité et l'étape de l'hérédité se fait de manière classique en utilisant* $A^{n+1} = A^n \times A$ *et en remarquant que* $2\times 2^n = 2^{n+1}$ *et que* $2^n - 1 + 2^n = 2\times 2^n - 1 = 2^{n+1}-1$.

2. *(a) On trouve* $N = B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *qui vérifie* $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $N^3 = 0_3$ *et est donc bien nilpotente.*

(b) On a, pour $n \geqslant 2$, $B^n = (N+2I_3)^n$ *et on peut appliquer la formule du binôme de Newton car ces deux matrices commutent. On obtient, en tenant compte du fait que pour tout* $k \geqslant 3, N^k = 0_3$.
$(N+2I_3)^n = \binom{n}{0} N^0 (2I_3)^n + \binom{n}{1} N^1 (2I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 (2I_3)^{n-2}$
Or, comme $(2I_3)^p = 2^p I_3$, *on obtient, en remplaçant les coefficients binômiaux par leur valeur simplifiée,*
$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 2n2^{n-1} + 3\dfrac{n(n-1)}{2}2^{n-2} \\ 0 & 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ *qu'on ne cherchera pas à simplifier ici. On peut vérifier que cette formule est également valable pour* $n=0$ *(cela donne l'identité) et* $n=1$ *(cela donne bien* B.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) En prenant les notations du cours : $ad - bc = 1\times(-2) - 1\times(-1) = -1 \neq 0$ *donc la matrice* P *est inversible et* $P^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que la matrice $D = P^{-1}CP$ *est égale à* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
C'est un calcul direct, deux produits à réaliser.

(c) On a tout d'abord $D^k = P^{-1}C^kP$ *par une récurrence faite dans un exemple du cours. Il suffit ensuite de constater que* $PD^kP^{-1} = PP^{-1}C^kPP^{-1} = I_2C^kI_2 = C^k$.
On peut aussi commencer par montrer que $C = PDP^{-1}$ *et faire une récurrence ensuite.*

(d) Il est très simple de montrer par une « mini-récurrence »(et, à ce stade, si vous avez déjà bien rédigé plusieurs récurrences, vous pouvez simplement rédiger « on montre par récurrence que »), que $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$.
On obtient ensuite l'expression de D^k *par un calcul direct, là encore deux produits à réaliser. On trouve bien* $C^k = \begin{pmatrix} 2-2^k & 1-2^k \\ 2^{k+1}-2 & 2^{k+1}-1 \end{pmatrix}$.

(e) On peut commencer par calculer $\sum_{k=0}^{10} D^k$ *via les formules de cours pour les sommes. On obtient* $\sum_{k=0}^{10} D^k = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-2^{k+1}}{1-2} \end{pmatrix}$.

On conclut par linéarité en observant que $\sum_{k=0}^{10} C^k = \sum_{k=0}^{10} PD^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{10} D^k\right)P^{-1}$ *et il reste donc deux produits de matrices à réaliser (n'hésitez pas à donner un plan de démonstration sans les calculs si vous êtes pris par le temps).*
Sinon, on fait directement le calcul des 4 sommes (une somme par coefficient de la matrice) qui sont toutes des applications directes de la linéarité et des sommes de la proposition 3 du chapitre 1. C'est légèrement plus long.
Dans tous les cas, on trouve $\begin{pmatrix} -2025 & -2036 \\ 4073 & 4084 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Autour des matrices inversibles)**.** *Soit* $p \in \mathbb{N}$ *et* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *tel que* $(A - 2I_p)^3 = 0_p$. *On suppose de plus que* $A \neq 2I_p$.

1. *On raisonne par l'absurde en supposant cette matrice inversible.*
   Il y a deux cas à distinguer :
   $(A - 2I_p)^2 = 0_p$ *et il suffit de multiplier cette égalité par* $(A - 2I_p)^{-1}$ *(à gauche ou à droite, peut importe) pour obtenir* $A - 2I_p = 0_p$*, ce qui contredit l'énoncé* ($A \neq 2I_p$)*.*
   Sinon, dans le cas $(A - 2I_p)^2 \neq 0_p$*, on a de toute manière* $(A - 2I_p)^3 = 0_p$ *donc en multipliant cette égalité par* $(A - 2I_p)^{-1}$ *(à gauche ou à droite), on obtient* $(A - 2I_p)^2 = 0_p$*, ce qui est également une contradiction.*
   On conclut que $A - I_p$ *n'est pas inversible.*
2. *On développe via la formule du binôme de Newton qui est valide car* A *et* I_p *commutent. On obtient :*
   $O_p = (A - 2I_p)^3 = A^3 + 3A^2(-2I_p) + 3A(-2I_p)^2 + (-2I_p)^3 = A^3 - 6A^2 + 12A - 8I_p$.
   On obtient donc, $\frac{1}{8}\left(A^3 - 6A^2 + 12A\right) = I_p$*, c'est à dire,* $A\left(\frac{1}{8}A^2 - \frac{6}{8}A + \frac{12}{8}I_p\right) = I_p$*. Donc* A *est inversible et son inverse est la matrice dans la parenthèse, ce qui, après simplification des fractions, donne le résult souhaité.*

Exercice 5 (Matrices et coefficients indéterminés)**.** *Soient* a*,* b *et* c *trois nombres réels. On a* $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 2ab \\ 0 & c^2 & 0 \\ 2ab & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

On a donc à résoudre des systèmes d'équations pour chacune des questions

1. $A^2 = I_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 & = & 1 \\ c^2 & = & 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$ *donc* $c = \pm 1$ *avec soit* ($a = 0$ *et* $b = \pm 1$) *soit* ($b = 0$ *et* $a = \pm 1$)*, ce qui donne 8 solutions en tout.*

2. $A^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 & = & a \\ c^2 & = & c \\ 2ab = b \end{cases}$ *donc* $c = 0$ *ou* 1 *avec soit* ($b = 0$ *et* $a = 0$ *ou* 1) *soit* ($a = \frac{1}{2}$ *et* $b = \pm\frac{1}{2}$)*, ce qui donne là encore 8 solutions en tout.*

Exercice 6. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 = 0_3$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$*, on définit la matrice* $E(t)$ *par* $E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$

1. *Montrer que :* $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)E(t') = E(t + t')$
2. *Calculer* $E(t)E(-t)$*. En déduire que la matrice* $E(t)$ *est inversible et déterminer son inverse en fonction de* I*,* A*,* A^2*,* t*.*
3. *Exprimer* $E(2t)$*,* $E(3t)$*,* $E(4t)$*,* $E(5t)$ *en fonction de* $E(t)$*. Quelle formule peut-on conjecturer ? Démontrer cette formule.*
   En déduire l'expression de $[E(t)]^n$ *en fonction de* I*,* A*,* A^2*,* t *et* n*.*

1. *On développe simplement la formule en utilisant que* $A^k = 0$ *si* $k > 3$ *(car* $A^k = A^{k-3}A^3$ *si* $k-3 > 0, k > 3$*) et que* $IB = BI = B$ *lorsque* B *est une matrice quelconque.*

$$\begin{aligned} E(t)E(t') =& (I + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2) \\ =& I^2 + (t+t')A + (tt' + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t'^2)A^2 + (\frac{1}{2}t^2t' + \frac{1}{2}tt'^2)A^3 + \frac{1}{4}t^2t'^2A^4 \\ =& I + (t+t')A + \frac{t^2 + 2tt' + t^2}{2}A^2 \\ =& I + (t+t')A + \frac{(t+t')^2}{2}A^2 = E(t+t') \end{aligned}$$

2. $E(t)E(t) = E(t + (-t)) = E(0) = I$ *donc* $E(t)$ *est inversible et* $E(-t)$ *est son inverse, c'est à dire,* $(E(t))^{-1} = E(-t) = I - tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$

3. $E(2t) = E(t+t) = E(t)Et(t) = E(t)^2$
   $E(3t) = E(2t+t) = E(2t)E(t) = (E(t))^2E(t) = E(t)^3$
   $E(4t) = E(3t+t) = E(3t)E(t) = (E(t))^3E(t) = E(t)^4$
   $E(5t) = E(4t+t) = E(4t)E(t) = (E(t))^4E(t) = E(t)^5$.
   Montrons par récurrence que pour tout réel t *et tout entier* n *; la proposition* $\mathcal{P}(n)$: $E(nt) = E(t)^n$ *est vraie.*
   Intialisation $n = 0$ *;* $E(t)^0 = I = E(0)$ *donc* (P_0) *est vraie.*
   Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ *est vraie. Montrons que* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie.*
   En effet $E((n+1)t) = E(nt+t) = E(nt)E(t) = E(t)^nE(t) = (E(t))^{n+1}$ *donc* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*
   Conclusion : $\forall n \geqslant 0; (E(t))^n = E(nt)$ *On en déduit que* $(E(t))^n = I + ntA + \dfrac{(nt)^2}{2}A^2$