Rattrappage du devoir surveillé n° 1

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Question préliminaire : soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *Simplifier les quantités suivantes :*
   (a) $(k+1)k!$ *(b)* $(k+2)(k+1)k!$
2. *On considère la somme* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$.
   (a) *Montrer que* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}((k+1)! - k!)$.
   (b) *En déduire que* $S_n = (n+1)! - 1$.
3. *On considère la somme* $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1) \times k!$.
   (a) *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *Justifier que* $k^2 + 1 = (k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1 - k$.
   (b) *En utilisant la décomposition précédente et la linéarité de la somme, montrer que :*
   $$T_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)! - 2\sum_{k=1}^{n}(k+1)! + \sum_{k=1}^{n}k! - S_n.$$
   (c) *En remarquant une propriété téléscopique sur les trois premières sommes, montrer que*
   $$T_n = (n+2)! - (n+1)! - 1 - S_n.$$
   (d) *Simplifier le résultat précédent pour obtenir* $T_n = (n+1)!n$.
4. *Redémontrer le résultat de la question précédente par récurrence pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. *Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :*

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. *Montrer que, pour tous réels a, b, on a :* $M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. *En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer son inverse.*
3. *Déterminer le réel a_0 **non nul**, tel que :* $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$
4. *On considère les matrices :* $P = M(a_0)$ *et* $Q = I_3 - P$.
   (a) *Montrer qu'il existe un réel α, que l'on exprimera en fonction de a, tel que :* $M(a) = P + \alpha Q$
   (b) *Calculer* P^2, QP, PQ, Q^2.
   (c) *Pour tout entier naturel n, non nul, montrer que* $[M(a)]^n = P + \alpha^n Q$.
   Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.

Exercice 3 (Racine carré d'une matrice)**.** *Le but de cet exercice est la résolution dans l'ensemble des matrice carrées de taille 2 de l'équation*

$$Z^2 = A \tag{1}$$

où Z est la matrice inconnue et $A = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$

1. *Soit* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer que* P *est inversible et trouver sa matrice inverse.*
2. *Donner l'instruction Scilab qui permet d'afficher la matrice* P *sur la console, ainsi que son inverse.*
3. *Montrer que la matrice* $D = P^{-1}AP$ *est diagonale et donner sa valeur.*
4. *Soit* $Y = P^{-1}ZP$. *Montrer que l'équation* (1) *équivaut à*
$$Y^2 = D \tag{2}$$
5. *On cherche à résoudre l'équation* (2) *en prenant* Y *sous la forme particulière :* $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$
   (a) *Calculer* Y^2 *en fonction de* x *et de* t
   (b) *En déduire que l'équation* (2) *admet 4 solutions.*
   (c) *Donner les quatre solutions de l'équation* (1) .

Exercice 4. *On considère les matrices* A, P *et* T *:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calcul des puissances de A

1. *En utilisant la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs de* λ *pour lesquelles la matrice* $A - \lambda I_3$ *n'est pas inversible.*
2. *Montrer que* $A = PTP^{-1}$.
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
4. *Prouver que pour tout élément* n *de* $\mathbb{N}^*$ *il existe un réel* α_n *tel que :*
$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
On donnera le réel α_1 *ainsi qu'une relation entre* α_{n+1} *et* α_n
5. *Montrer que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \alpha_n = n2^{n-1}$$
En déduire l'écriture matricielle de A^n *en fonction de* n.

2. Matrices commutant avec A.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble* $C(A)$ *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *des matrices* M *telles que :*
$$AM = MA$$

1. *Pour* M *appartenant à* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *on pose* $M' = P^{-1}MP$.
Montrer que :
$$AM = MA \Longleftrightarrow TM' = M'T.$$
2. *Montrer qu'une matrice* M' *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) *vérifie* $TM' = M'T$ *si et seulement si* M' *est de la forme* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ *où* a, b, c *sont trois réels.*
3. *En déduire que* M *appartient à* $C(A)$ *si et seulement si il existe des réels* a, b, c *tels que :*
$$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$
4. *En déduire que les matrices* M *qui commuttent avec* A *sont de la forme :*
$$aM_1 + bM_2 + cM_3 \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$
où M_1, M_2 *et* M_3 *sont trois matrices que l'on déterminera.*