Devoir surveillé n° 2

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (Exercices en vrac)**.** *Toutes les « grosses » questions sont indépendantes les unes des autres.*

1. *Donner un exemple de deux polynômes P et Q pour lesquels $deg(P+Q) < max(deg(P), deg(Q)) - 1$.*

2. *On considère une suite arithmétique (u_n) vérifiant $u_5 = 4$ et $u_{11} = 22$. Déterminer le terme général de la suite et la somme $u_0 + u_1 + \dots u_n$ en fonction de n.*

3. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence suivante : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3+2u_n}$.*
   On admet que cette suite est bien définie et que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) *Calculer u_1 et u_2. Au vu des trois premiers termes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle être arithmétique ou géométrique ?*
   (b) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = 3v_n + 2$.*
   (c) *En déduire la forme explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de la suite (u_n).*
   (d) *Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.*
   (e) *Que fait le programme Scilab suivant ?*
```
n=input('entrer un entier n : ')
u=1
S=1
for i=1:n
u=u/(3+2*u)
S=S+u
end
disp(S)
```
   (f) *Donner la valeur affichée par le programme lorsque l'utilisateur entre* `n=3` *(il n'est pas nécessaire de simplifier le résultat).*

Exercice 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.*

1. *Calculer $f_n(x)$ en fonction de n et x.*
2. *En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.*
3. *En utilisant ce qui précède calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.*
4. *Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2\ 015x^{2016} - 2\ 016x^{2\ 015} + 1}{(x-1)^2}$*
5. *Montrer que l'équation $f_n(x) = n-1$ admet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une unique solution dans $[0\,;1[$ qu'on note α_n.*
6. *Déterminer α_1 et α_2.*
7. *Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) = n - 1 + \alpha^{n+1}$. En déduire que la suite (α_n) est croissante puis qu'elle converge vers une limite l.*

8. *Montrer que* $l \in [0\,;1]$.
9. *Justifiez que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha_n) \leqslant \dfrac{\alpha_n}{1-\alpha_n}$.
10. *Montrer par l'absurde que* $l = 1$.

Exercice 3. *Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées séparément en admettant les résultats des autres parties.*

1. ***Étude d'une fonction f***
   Soit f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$. *On désigne par* $\mathcal{C}$ *sa courbe représentative.*
   (a) *Justifier que* f *est bien définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
   (b) *Étudier les variations de* f *sur* $\mathbb{R}$.
   (c) *Étudier la limite de* f *en* $-\infty$ *et en* $+\infty$.
   Comment interpréter graphiquement ces limites ?
   (d) *Justifier que l' équation de la tangente* T *à* $\mathcal{C}_f$ *au point d'abscisse 0 est* $y = x$.
   (e) *Etudier la position relative de* $\mathcal{C}$ *et de* T. *Préciser les points d'intersection.*
   (f) *Construire* T *puis* $\mathcal{C}$ *en tenant compte de l'étude réalisée.*

2. ***Limite d'une suite définie à partir de f***
   On considére la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* , $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{u_n^2+u_n+1}$
   (a) *Soit* p *un entier naturel non nul.* $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = f(p)$
   (b) *Montrer que pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, $f(p) - \dfrac{1}{p+1} \leqslant 0$
   (c) *En déduire que* $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1}$.
   (d) *En déduire par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$
   (e) *Conclure quand à la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. ***Un résultat intermédiaire :***
   (a) *Étudier l'ensemble de définition et les variations de la fonction* $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$
   (b) *Étudier les limites en* -1 *et en* $+\infty$ *de* g.
   Pour cette dernière limite, on pourra justifier et utiliser l'égalité $g(x) = x\left(\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right)$.
   (c) *Déduire :* $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.
   (d) *Appliquer l'inégalité précédente à* $x = -\dfrac{1}{k}$ *pour* $k \geqslant 2$ *et déduire que :*
   $\ln(k) - \ln(k-1) \geqslant \dfrac{1}{k}$.
   (e) *En sommant l'inégalité précédente, montrer que :* $\forall n \geqslant 2, \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)$
   (f) *On souhaite écrire un programme* `Scilab` *pour vérifier ce résultat. Compléter le programme suivant pour qu'il demande à l'utilisateur de choisir un entier* n, *crée la matrice ligne* `k` *des entiers entre 2 et* n, *puis celle* `T` *de leurs inverses, affiche* $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ *puis affiche enfin* $\ln(n)$ *:*

```
n =.......
k =.......
T =.......
S =.......
 .......
```

4. ***Étude plus précise du comportement de u en*** $+\infty$
On rappelle dans cette partie que *:* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
   (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$
   (b) *Déduire par récurrence que :* $\forall n \geqslant 2, \quad \dfrac{1}{u_n} \leqslant n + 2 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$.
   (c) *A l'aide des résultats précédents et de la question 3.(e) justifier que :*
   $\forall n \geqslant 2, \dfrac{1}{n+2+\ln n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (d) *Déduire un encadrement de* (nu_n) *puis étudier la limite de* $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. *Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :*

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a *représente un nombre réel.*

1. *Montrer que, pour tous réels* a, b, *on a :* $M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. *En déduire les valeurs de* a *pour lesquelles la matrice* $M(a)$ *est inversible et exprimer son inverse.*
3. *Déterminer le réel* a_0 ***non nul****, tel que :* $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$
4. *On considère les matrices :* $P = M(a_0) \quad$ *et* $\quad Q = I_3 - P$.
   (a) *Montrer qu'il existe un réel* α*, que l'on exprimera en fonction de* a*, tel que :* $M(a) = P + \alpha Q$
   (b) *Calculer* P^2, QP, PQ, Q^2.
   (c) *Pour tout entier naturel* n*, non nul, montrer que* $[M(a)]^n = P + \alpha^n Q$.
   Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.

Exercice 5 (Racine carré d'une matrice)**.** *Le but de cet exercice est la résolution dans l'ensemble des matrice carrées de taille 2 de l'équation*

$$Z^2 = A \tag{1}$$

où Z *est la matrice inconnue et* $A = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$

1. *Soit* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer que* P *est inversible et trouver sa matrice inverse.*
2. *Donner l'instruction Scilab qui permet d'afficher la matrice* P *sur la console, ainsi que son inverse.*
3. *Montrer que la matrice* $D = P^{-1}AP$ *est diagonale et donner sa valeur.*
4. *Soit* $Y = P^{-1}ZP$. *Montrer que l'équation* (1) *équivaut à*

$$Y^2 = D \tag{2}$$

5. *On cherche à résoudre l'équation* (2) *en prenant* Y *sous la forme particulière :* $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$
   (a) *Calculer* Y^2 *en fonction de* x *et de* t
   (b) *En déduire que l'équation* (2) *admet 4 solutions.*
   (c) *Donner les quatre solutions de l'équation* (1) .