Devoir surveillé n° 2

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Question 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $]-\infty;-1]$ par $f(x) = \frac{x^2}{1+2x}$. On donne $u_0 \leqslant -1$.

1. Montrer que f est croissante sur $]-\infty;-1]$.
2. Montrer que $\forall x \leqslant -1 : f(x) \geqslant x$.
3. Montrer à l'aide de la question 1) que $\forall n \geqslant 0 : u_n \leqslant -1$.
4. Montrer à l'aide de la question 2) que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
5. Conclure que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Question 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = \frac{1+(u_n)^2}{2}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{2}$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \geqslant 0 : 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
4. Conclure que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 2 (Autour d'une formule de somme)

Soient $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ des nombres réels. Le but de cet exercice est de montrer par deux méthodes différentes la propriété, notée $(\star)$ dans cet exercice :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - na_n \ (\star)$$

1. **Méthode par récurrence : on note donc $\mathcal{P}(n)$: «** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - na_n$ **»**

   (a) Démontrer l'étape d'initialisation.

   (b) Recopier, en complétant les pointillés par une expression ne contenant plus le symbole Σ, les formules valables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\left(a_k - a_{k+1}\right)\right) + \ldots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right) - \ldots \end{cases}$$

   (c) Démontrer l'étape de l'hérédité à l'aide des égalités précédentes (attention à bien énoncer $\mathcal{P}(n+1)$!).

2. **Méthode utilisant une somme télescopique :** *dans cette partie on ne raisonnera donc PAS par récurrence.*

(a) En reconnaissant une somme télescopique, calculer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (ka_k - (k+1)a_{k+1})$.

(b) Vérifier, pour tout entier naturel k, l'égalité : $k\,(a_k - a_{k+1}) = (ka_k - (k+1)a_{k+1}) + a_{k+1}$.

(c) Démontrer la propriété $(\star)$.

3. **Deux applications :**

   (a) Appliquer la propriété $(\star)$ avec $a_k = k^2$. Puis déduire à l'aide d'une identité remarquable, déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k(2k+1)$

   (b) i. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, en utilisant une propriété du logarithme.

   ii. En appliquant la propriété $(\star)$ à des valeurs de a_k bien choisies, montrer, en utilisant le résultat précédent, que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

Exercice 3

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie I : Exemples

1. Premiers exemples
   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

   (a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.

   (b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

   (c) pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

2. Une propriété de l'opération * : Montrer que pour toutes suites u et v, $u * v = v * u$.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

   (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   (b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} c_{n-k} = a_n$.

Que peut-on en déduire pour les suites $b * c$ et a ?