Devoir surveillé n° 2

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :

Chaque« grosse » question peut être traitée indépendamment des autres.

1. Donner un exemple de deux polynômes de degré 3 dont la somme est de degré 1.
2. Soit n un entier naturel. Simplifier $\dfrac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$.
3. Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $\ln(x) \leqslant x-1$.
4. (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 + 5X^2 - 3$.
   (b) Déduire de la question précédente :
      i. L'ensemble de définition de $f : x \mapsto \ln(2x^3 + 5x^2 - 3)$.
      ii. L'ensemble de solutions de l'équation $2\mathrm{e}^{3x} + 5\mathrm{e}^{2x} = 3$.
5. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X+1)$ en fonction de n.
   (b) Vérifier que $A^2 - I_2 = 0_2$ (I_2 : matrice identité et 0_2 : matrice nulle).
   (c) En remarquant que $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ et à l'aide des deux questions précédentes, déduire les 4 coefficients de la matrice A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Chacune des « grosses » questions est indépendante des autres

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, expliciter les sommes suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k}$. (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$
2. Soit $f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3x}{x+2} \end{cases}$
   (a) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
   (b) Donner les éventuels antécédents de 3 par f, puis de $\dfrac{1}{2}$ par f.
   (c) Ces résultats permettent-ils de dire si f est injective ou pas ?
   (d) Ces résultats permettent-il de dire si f est surjective ou pas ?
   (e) Montrer que si on remplace l'ensemble d'arrivée par $\mathbb{R} - \{3\}$, alors f est bijective et donner expliciter la fonction réciproque de f.
3. On cherche à calculer $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$, pour un entier $n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que $\dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{-2}{k-1} + \dfrac{5}{k} + \dfrac{-3}{k+1}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.
   (b) En déduire la valeur de la somme S grâce à une propriété de téléscopage.

Exercice 3 (Matrices « carrés magiques)

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante :
une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}$ si :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note $s(A)$ la valeur **commune** de ces six sommes.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et

J la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et donner les valeurs $s(I)$ et $s(J)$.

2. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par : $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
   Déterminer les réels a et b pour que K soit une matrice de $\mathcal{E}$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

   (a) Calculer AJ et JA.

   (b) Montrer que A appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $AJ = JA$.

   (c) Vérifier que si A appartient à $\mathcal{E}$, alors $AJ = s(A)J$.

4. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.
   (a) A l'aide de la caractérisation du 3.b, montrer que le produit AB appartient à $\mathcal{E}$.

   (b) A l'aide de la question 3.c, établir l'égalité : $s(AB) = s(A)S(B)$.

5. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

   (a) À l'aide de la question 3.b, montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$.

   (b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $s(A)$.

6. (*) Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.
   On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.

   (a) Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$.

   (b) Montrer que : $BC = CB = 0_3$, la matrice nulle, en se servant de l'égalité $J^2 = 3J$.

   (c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 1, que : $(A - B)^n = A^n - B^n$.

   (d) La matrice C appartient-elle à $\mathcal{F}$?

   (e) En déduire que toute matrice A de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à J et d'une matrice de $\mathcal{F}$