Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2 (corrigé)

Exercice 1. *1. On peut prendre $P(X) = X^2 + 1$ et $Q(X) = -X^2$.*
Ainsi, $P(X) + Q(X) = 1$ donc $0 = deg(P + Q) < \max(deg(P), deg(Q)) - 1 = 2 - 1 = 1$.

2. La suite est arithmétique donc $u_{11} = u_5 + (11 - 5)r$, où r est la raison. On obtient : $r = \dfrac{22 - 4}{11 - 5} = 3$.
Donc $u_0 = u_5 + (0 - 5)r = -11$ et $u_n = -11 + 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On en déduit $u_0 + \cdots + u_n = \dfrac{(n + 1)(-11 + (-11 + 3n)}{2} = \dfrac{(n + 1)(3n - 22)}{2}$.

3. (a) $u_1 = \dfrac{u_0}{3 + 2u_0} = \dfrac{1}{5}$ et $u_2 = \dfrac{u_1}{3 + 2u_1} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{15}{5} + \frac{2}{5}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{17}{5}} = \dfrac{1}{17}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_n + 1 = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{3 + 2u_n}} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n} = 3 \times \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{2u_n}{u_n} = 3v_n + 2$.

(c) C'est une suite arithmético-géométrique donc on résout $x = 3x + 2$ qui donne $x = -1$, ce qui conduit à poser $w_n = v_n - (-1) = v_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = 3v_n + 2 + 1 = 3v_n + 3 = 3(v_n + 1) = 3w_n$ qui est donc une suite géométrique de raison 3.
Comme $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$ et $w_0 = v_0 + 1 = 2$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = 2(3)^n$
puis $v_n = w_n - 1 = 2 \times 3^n - 1$. Finalement, $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2 \times 3^n - 1}$

(d) Par linéarité et d'après les formules de sommes remarquables,
$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} w_k + \sum_{k=0}^{n}(-1) = 2\frac{1 - 3^{n+1}}{1_3} + (n + 1)(-1) = 3^{n+1} - n - 2.$$

(e) Le programme demande une valeur de n à l'utilisateur, puis calcule et affiche $u_0 + \cdots + u_n$.

(f) Le résultat affiché sera donc $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{17} + \dfrac{1}{53}$

Exercice 2. *corrigé en classe*

Exercice 3. *1. **Étude d'une fonction f***

(a) f est définie et continue quand son dénominateur ne s'annule pas. Or le discriminant de $x^2 + x + 1$ est -3, qui est strictement négatif, donc le dénominateur est toujours strictement positif (du signe de 1). Ainsi $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ et f est continue sur son ensemble de définition.

(b) f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1(x^2 + x + 1) - (2x + 1)x}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2} = \boxed{\frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + x + 1)^2}}.$$
$f(1) = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$ *et* $f(-1) = \frac{-1}{1-1+1} = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

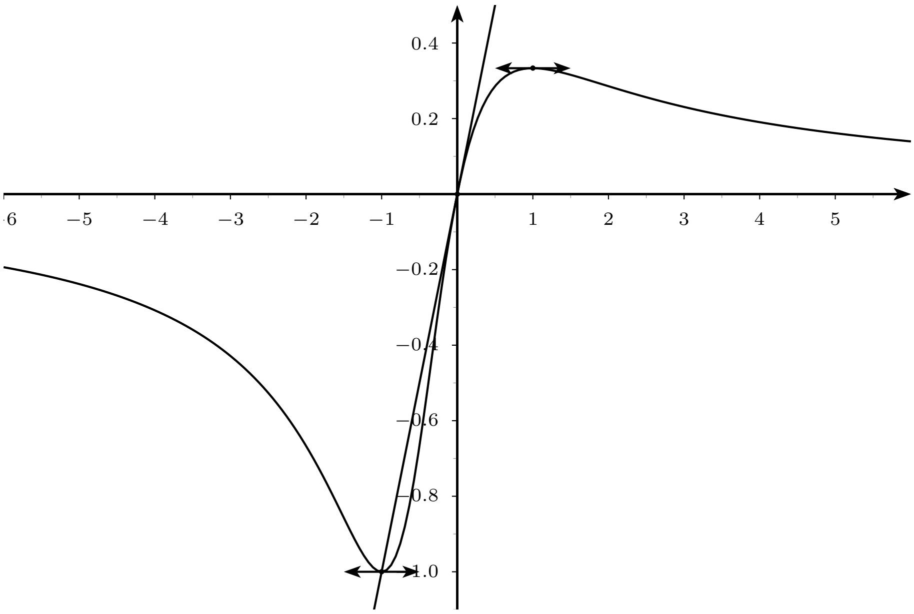
f' s'annule et change de signe en -1 et en 1 donc f admet $f(-1) = -1$ comme minimum local en -1, et $f(1) = \dfrac{1}{3}$ comme maximum local en 1.

(c) Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \dfrac{1}{x(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}$
Ceci lève les indéterminations et on trouve pour limite $\boxed{0 \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty}$.
La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

(d) *T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1x + 0$ soit* $\boxed{y = x}$.

(e) *Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(x) - x = \dfrac{x}{(x^2+x+1)} - \dfrac{x(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} = \dfrac{x(1-x^2-x-1)}{(x^2+x+1)} = \dfrac{-x^2(1+x)}{x^2+x+1}$ qui est du signe de $-(x+1)$ (le numérateur est strictement positif, x^2 aussi).*
Par conséquent, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au dessus de } T \text{ sur }]-\infty;-1] \text{ et en dessous de } T \text{ sur } [-1;+\infty[}$.
Enfin, $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow -x^2(1+x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 = 0$ ou $x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ou$ $x = -1$.
Les deux points d'intersections sont donc $\boxed{O(0;0) \text{ et } I(-1;-1)}$.

(f) *Placer les extrema locaux et les tangentes horizontales, marquer le point d'abscisse 0, tracer T, tenir compte des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$, puis tracer la courbe.*



2. ***Limite d'une suite définie à partir de f***

(a) *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1} = \dfrac{\frac{1}{p}}{\frac{1+p+p^2}{p^2}} = \dfrac{1}{p}\dfrac{p^2}{p^2+p+1} = \dfrac{p}{p^2+p+1}\boxed{= f(p)}$*

(b) *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $f(p) - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{p(p+1)}{(p+1)(p^2+p+1)} - \dfrac{p^2+p+1}{(p+1)(p^2+p+1)} = \dfrac{-1}{(p+1)(p^2+p+1)} \leqslant 0$ car p est un entier naturel.*

(c) *$f\left(\dfrac{1}{p}\right) = f(p) \leqslant \dfrac{1}{p+1}$, d'après les deux questions précédentes.*

(d) *Posons $\mathcal{P}(n)$ « $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$ ». Comme $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{0+1} = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme f est strictement croissante sur $[0;+\infty]$, on a : $f(0) < f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{n+1}\right)$, donc $0 < u_{n+1} \leqslant f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+2}$, la dernière inégalité est justifiéé par la question précédente appliquée à $p = n+1$.
On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(e) *Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on applique le théorème des gendarmes à la série d'inégalités démontrées à la question précédente. On en déduit que* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3. ***Un résultat intermédiaire***

(a) *g est définie, continue et dérivable en tout x tel que $1 + x > 0$.*

Donc $\boxed{D_g =]-1;+\infty[}$ *et g est dérivable sur D_g*
De plus $\forall x > -1, g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$
$g(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln 1 = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

(b) $\lim_{x\to -1} 1+x=0$ *et* $\lim_{y\to 0}\ln y=-\infty$ *donc* $\lim_{x\to -1} g(x)=-\infty$

$\forall x>0, g(x)=\ln(x(1+\frac{1}{x}))-x=\ln x+\ln(1+\frac{1}{x})-x=x(\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}+\frac{\ln x}{x}-1)$

Or $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x})=\ln 1=0$ *et par croissance comparée* $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

Donc, par sommes et produits de limites $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

(c) *Le tableau de variation fait en (a) montre que g admet un maximum en 0, qui vaut 0.*

Donc $\forall x>-1, g(x)=\ln(1+x)-x\leqslant 0$. *Ainsi* $\boxed{\forall x>-1, \ln(1+x)\leqslant x}$

(d) *Soit $k\geqslant 2$. Posons $x=-\frac{1}{k}$ Alors $x>-1$ donc d'après la question précédente :*

$\ln(1-\frac{1}{k})\leqslant -\frac{1}{k}\Rightarrow \ln(\frac{k-1}{k})\leqslant -\frac{1}{k}\Rightarrow \ln(k-1)-\ln k\leqslant -\frac{1}{k}$

En multipliant par -1 :

$\boxed{\forall k\geqslant 2, \ln k-\ln(k-1)\geqslant \frac{1}{k}}$

(e) *En sommant l'inégalité précédente :* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln k-\ln(k-1))\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$

En appliquant la méthode des suites télescopiques : $\forall n\geqslant 2, \ln n-\ln(2-1)\geqslant \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}$, *ce qui donne*

bien $\boxed{\forall n\geqslant 2, \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leqslant \ln n}$

(f)
```
n=input(''Choisir une valeur :'')
k=2:n
T=1./k
disp(sum(T))
disp(log(n))
```

4. ***Étude plus précise du comportement de u en*** $+\infty$

(a) $\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{{u_n}^2+u_n+1}{u_n}=\dfrac{{u_n}^2}{u_n}+\dfrac{u_n}{u_n}+\dfrac{1}{u_n}$. *On a bien* $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+1}}=u_n+1+\dfrac{1}{u_n}}$

(b) *Posons, pour tout $n\geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$:« $\frac{1}{u_n}\leqslant n+2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$*

$u_1=f(u_0)=f(1)=\frac{1}{3}$ *et* $u_2=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3+9}{9}}=3/13$. *Donc* $\frac{1}{u_2}=\frac{13}{3}$

D'autre part $2+2+\sum_{k=2}^{2}\frac{1}{k}=\frac{9}{2}$ *Or* $\frac{13}{3}\leqslant\frac{9}{2}$ *donc* $\mathcal{P}(2)$ *est vraie.*

Soit $n\geqslant 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. D'après la (a) : $\frac{1}{u_{n+1}}=u_n+1+\frac{1}{u_n}$.

Donc, par hypothèse de récurrence : $\dfrac{1}{u_{n+1}}\leqslant u_n+1+\left(n+2+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)$

D'après le résultat rappelé : $\dfrac{1}{u_{n+1}}\leqslant\dfrac{1}{n+1}+1+n+2+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$

D'après la relation de Chasles : $\dfrac{1}{u_{n+1}}\leqslant(1+n)+2+\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$, *donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.*

Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n\geqslant 2, \dfrac{1}{u_n}\leqslant n+4+\displaystyle\sum_{k=2}n\frac{1}{k}}$

(c) *D'après la question précédente et la question 3.(e) :* $\forall\geqslant 2, \dfrac{1}{u_n}\leqslant n+2+\ln n$

Or $u_n>0$ *donc :* $u_n\geqslant\dfrac{1}{n+2+\ln n}$, *donc, avec l'inégalité rappelée, on a :*

$\boxed{\forall n\geqslant 2, \dfrac{1}{n+4+\ln n}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}}$

(d) *En multipliant par n (positif) dans l'encadrement précédent :* $\forall n\geqslant 2, \dfrac{n}{n+4+\ln n}\leqslant nu_n\leqslant\dfrac{n}{n+1}$

Étudions les limites des extrémités de l'encadrement :

$\star$ $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$. *Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

$\star$ $\dfrac{n}{n+4+\ln n} = \dfrac{1}{1+\frac{4}{n}+\frac{\ln n}{n}}$ *et* $\frac{\ln n}{n} \to 0$ *par croissance comp.. Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+4+\ln n} = 1$

Ces deux limites sont égales, donc par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1}$

Exercice 4. 1. *Un calcul direct nous donne*

$$M(a)M(b) = \begin{pmatrix} 1-2a-2b+6ab & a+b-3ab & a+b-3ab \\ a+b-3ab & 1-2a-2b+6ab & a+b-3ab \\ a+b-3ab & a+b-3ab & 1-2a-2b+6ab \end{pmatrix} = M(a+b-3ab)$$

2. *En remarquant que* $M(0) = I_3$, *on cherche l'inverse éventuel de* $M(a)$ *sous la forme* $M(b)$

$$M(a)M(b) = I_3 \Leftrightarrow M(a+b-3ab) = M(0) \Leftrightarrow a+b-3ab = 0 \Leftrightarrow b(1-3a) = -a$$

Lorsque $1-3a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{1}{3}$, *en choisissant* $b = -\dfrac{a}{1-3a} = \dfrac{a}{3a-1}$, *on a bien* $M(a)M(b) = I_3$ *donc* $M(a)$ *est inversible et son inverse est* $M\left(\dfrac{a}{3a-1}\right)$.

Lorsque $1-3a = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3}$, *la matrice* $M(a)$ *est égale à* $M\left(\dfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. *Etudions l'inversibilité de cette matrice*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure et au moins un de ses coefficients diagonaux est nul donc elle n'est pas inversible, ce qui implique que la matrice $M\left(\dfrac{1}{3}\right)$ *n'est pas inversible.*

Par conséquent, $M(a)$ *est inversible ssi* $a \neq \dfrac{1}{3}$ *et dans ce cas,* $[M(a)]^{-1} = M\left(\dfrac{a}{3a-1}\right)$

3. *En utilisant la question 1, on a*

$$\begin{aligned} [M(a_0)]^2 &= M(a_0) \Leftrightarrow M(a_0)M(a_0) = M(a_0) \Leftrightarrow M(2a_0 - 3a_0^2) = M(a_0) \Leftrightarrow 2a_0 - 3a_0^2 = a_0 \\ &\Leftrightarrow a_0 - 3a_0^2 = 0 \Leftrightarrow a_0(1-3a_0) = 0 \Leftrightarrow a_0 \text{ ou } a_0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un unique réel a_0 *non nul tel* $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$ *qui est* $a_0 = \dfrac{1}{3}$.

4. (a) *Pour commencer, on a*

$$P = M\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ce qui implique que

$$M(a) = P+\alpha Q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2a = \frac{2}{3}\alpha + \\ a = -\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha = \frac{2}{3}-2a \\ -\frac{1}{3}\alpha = -\frac{1}{3}+a \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1-3a \Leftrightarrow M(a) = P+(1-3a)Q$$

(b) *Je laisse le lecteur vérifier que* $P^2 = P, \quad QP = 0_3, \quad PQ = 0_3, \quad Q^2 = Q$

(c) *On procède par récurrence en posant* $(\mathcal{P}_n) : [M(a)]^n = P+(1-3a)^n Q$.
Initialisation $n = 0$ *:* $P+(1-3a)^0 Q = P+Q = I_3$ *(car* $Q = I_3 - P$*) et* $[M(a)]^0 = I_3$ *donc* $[M(a)]^0 = P+(1-3a)^0 Q$*, ce qui implique la véracité de* $(\mathcal{P}_0)$*.*
Hérédité *: Supposons que* $(\mathcal{P}_n)$ *soit vraie et montrons* $(\mathcal{P}_{n+1})$*, c'est-à-dire supposons que* $[M(a)]^n = P+(1-3a)^n Q$ *et montrons que* $[M(a)]^{n+1} = P+(1-3a)^{n+1}Q$*. En utilisant les question 4.a) et 4.b) ainsi que l'hypothèse* $(\mathcal{P}_n)$*, on a :*

$$\begin{aligned} [M(a)]^{n+1} &= M(a)[M(a)]^n = (P+(1-3a)Q)(P+(1-3a)^n Q) \\ &= P^2+(1-3a)^n QP+(1-3a)PQ+(1-3a)^{n+1}Q^2 = P+(1-3a)^{n+1}Q \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ *et achève la récurrence.*

Exercice 5. 1. *On a* $1\times1-1\times(-1) = 2 \neq 0$ *donc* P *est inversible et* $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. `P=[1/2,-1/2;1/2,1/2]`

3.

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}.A.P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/8 & 8/8 \\ -2/8 & 8/8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est bien diagonale.} \end{aligned}$$

4. *Soit* $Y = P^{-1}ZP$*. Comme* P *est inversible,*

$$Z^2 = A \Leftrightarrow P^{-1}Z^2 = P^{-1}A \Leftrightarrow P^{-1}Z^2P = P^{-1}AP \Leftrightarrow P^{-1}ZP\cdot P^{-1}ZP = P^{-1}AP \Leftrightarrow Y^2 = D$$

5. *Soit* $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$

(a) $Y^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$

(b) *Donc* Y *est solution de (2) si et seulement si :*
$x^2 = \frac{1}{4}$ *et* $t^2 = 1$*, ce qui donne* $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $\left(\frac{1}{2};-1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ *comme valeurs possibles pour* $(x;t)$

(c) *On calcule* $Z = PYP^{-1}$ *avec les 4 matrices* Y *possibles.*
On trouve $Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ *ou* $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ *ou* $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ *ou* $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$