Correction du DS n° 2

Exercice 1

Question 1

1. On a $f(x)=\dfrac{x^2}{1+2x}$, d'où $f'(x)=\dfrac{2x(1+2x)-2x^2}{(1+2x)^2}=\dfrac{2x(1+x)}{(1+2x)^2}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $2x(1+x)$ car $(1+2x)^2>0$. On a, pour tout $x\leqslant -1,\ 2x<0$ et $1+x\leqslant 0$, d'où pour tout $x\leqslant -1, f'(x)\geqslant 0$.
Donc f est croissante.
2. $\forall x\leqslant -1, f(x)-x=\dfrac{x^2}{1+2x}-x=\dfrac{x^2-x-2x^2}{1+2x}$, Soit $f(x)-x=\dfrac{-x-x^2}{1+2x}=\dfrac{-x(1+x)}{1+2x}$. Or sur l'intervalle $]-\infty,-1], -x\geqslant 0, 1+x\leqslant$ et $1+2x<0$. D'où $\forall x\leqslant -1,\ f(x)-x\geqslant 0$, soit $f(x)\geqslant x$.
3. Montrons par récurrence que : $\forall n\geqslant 0: u_n\leqslant -1$.
Pour $n=0, u_n=u_0\leqslant -1$.
Supposons que pour un entier $n\geqslant 0, u_n\leqslant -1$.
Montrons que $u_{n+1}\leqslant 1$. Comme f est croissante, on an $f(u_n)\leqslant f(-1)$. Or $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(-1)=-1$, d' ou $u_{n+1}\leqslant -1$;
Conclusion : Pour tout $n\geqslant 0, u_n\leqslant -1$ 4) on a : $\forall n\geqslant 0, u_n\leqslant -1$ et d' on d'après la question 2), $f(u_n)=u_{n+1}\geqslant u_n$ Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
4. La suite (u_n) est croissante d'après 4) et majorée par -1, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge d'après le théorème de la convergence monotone vers une limite l. Comme f est continue sur $]-\infty,-1]$, on a $f(l)=l$. Mais $f(l)=l\Leftrightarrow\dfrac{-l(l+1)}{1+2l}=0$ (voir 2)). Donc $f(l)=l\Leftrightarrow l=0$ on $l=-1$. Comme pour tout $n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant -1$, on a : $l\leqslant -1$ Donc $f(l)=l\Leftrightarrow l=-1$.
On conclu que la suite $(u_n)_n$ converge vers -1.

Question 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0=0$ et $\forall n\geqslant 0: u_{n+1}=\dfrac{1+(u_n)^2}{2}$.

1.
$$u_1=\frac{1+u_0^2}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$
$$u_2=\frac{1+u_1^2}{2}=\frac{1+\frac{1}{4}}{2}=\frac{5}{8}.$$
2. $\forall n\geqslant 0, u_{n+1}-u_n=\dfrac{1+u_n^2}{2}-u_n$
$$=\frac{1+u_n^2-2u_n}{2}$$
$$=\frac{(u_n-1)^2}{2}$$
On a pour tout $n\geqslant 0$, $\dfrac{(u_n-1)^2}{2}\geqslant 0$, d'où $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$. Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
3. Pour $n=0$, on $a: 0\leqslant u_n=u_0=0\leqslant 1$.
Supposons que $0\leqslant u_n\leqslant 1$ pour un entier n, montrons que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$. On a, $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f:x\longmapsto\dfrac{1}{2}(1+x^2)$.
Or f est croissante sur $[0;+\infty[$ et par hypothèse de récurrence $0\leqslant u_n\leqslant 1$,
d'où $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant 1$. Or $f(0)=0,\ f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(1)=1$
Donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.
4. La suite $(\ u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante (d'après 2)) et majorée (d'après 3)), donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ Converge vers une limite l. Comme $f:x\mapsto\dfrac{1+x^2}{2}$ est continue sun $\mathbb{R}$ on a $f(l)=l$. Or $f(l)=\Leftrightarrow f(l)-l=0\Leftrightarrow l=1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

Exercice 2

(a) Pour $n=1$ on a $\sum_{k=0}^{n-1} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=0\times\left(a_0-a_1\right)=0$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)-na_n=a_1-1\times a_1=0$ Donc $P(0)$ est vraie.

(b) $\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=\sum_{k=0}^{n-1} k\left(a_k-a_{k+1}\right)+n\left(a_n-a_{n+1}\right) \\ \sum_{k=1}^{n} a_k=\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)-a_{n+1} \end{cases}$

(c) $P(n+1)$: $\sum_{k=0}^{n} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)-(n+1)a_{n+1}$.

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier n, montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a : $\sum_{k=0}^{n} k(a_k-a_{k+1})=\left(\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k-a_{k+1})\right)+n\left(a_n-a_{n+1}\right)$ (d'après b))

Or $\sum_{k=0}^{n-1} k\left(a_k-a_k+1\right)=\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)-na_n$ par hypothèse de récurrence,

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=&\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)-na_n+n\left(a_n-a_{n+1}\right)\\ =&\sum_{k=1}^{n} a_k+na_{n+1}\\ =&\sum_{k=1}^{n+1} a_k-a_{n+1}-na_{n+1}\end{aligned}$$

Soit $\sum_{k=0}^{n} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n} a_k-(n+1)a_{n+1}$

2) (a) $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1}\left(ka_k-(k+1)a_{k+1}\right)=0\times a_0-na_n$

(b) On a :

$$\begin{aligned}(ka_k-(k+1)-a_{k+1})+a_{k+1}=&(ka_k-ka_{k+1}-a_{k+1})+a_{k+1}\\ =&ka_k-ka_{k+1}\\ =&k\left(a_k-a_{k+1}\right)\end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k-a_{k+1})=&\sum_{k=0}^{n-1}(ka_k-(k+1)a_{k+1})+a_{k+1})\\ =&\sum_{k=0}^{n-1}\left(ka_k-(k+1)a_{k+1}\right)+\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1}\left(ka_k-(k+1)a_{k+1}\right)=-na_n$ et $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}=\sum_{k=1}^{n} a_k$ par changement d'indice.

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=-na_n+\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Soit

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + na_n$$

3). (a) Pour $a_k = k^2$, an a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} k\left(a_k - a_{k+1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - na_n \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} k\left(k^2-(k+1)^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - n^3 \\ \Leftrightarrow -\sum_{k=0}^{k=n-1} k(2k+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^3 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} k(2k+1) = -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^3\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^3 =& n\left(\frac{-(n+1)(2n+1)+6n^2}{6}\right) \\ =& n\frac{4n^2-3n-1}{6} \\ =& \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\left(k^2-(k+1)^2\right) = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$.

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) =& \sum_{k=0}^{n-1} k(\ln(k) - \ln(k+1)) \\ =& \sum_{k=1}^{n}(\ln(k)) - n\ln(n) \text{ d'après (*) pour } a_k = \ln(k). \\ =& \ln(n!) - \ln\left(n^n\right)\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

Exercice 3

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie I : Exemples

1. Premiers exemples

   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

   (a) On a alors $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2\cdot 3 = 6\,(n+1)$

(b) $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$. On a alors

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{n} (2/3)^k = 3^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = -2^{n+1} + 3^{n+1}$$

(c) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{3^n}{n!}$. On a alors

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} C_n^k 2^k 3^{n-k} = \frac{1}{n!} (2+3)^n = \frac{1}{n!} 5^n$$

2. En changeant l'indice k par $n-k$, on obtient le résultat.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Si une suite a est décroissante alors pour tout entier $n > 0$: $a_{n+1} \leq a_n \leq a_{n-1}$ donc $a_{n+1} \leq a_{n-1}$ et en additionnant ces deux inégalités on a $2a_{n+1} \leq a_n + a_{n-1}$ ou encore, $a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$.
   Donc toute suite décroissante de réels positifs est élément de A.
   Si une suite a est strictement croissante alors $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$ et $2a_{n+1} > a_n + a_{n-1}$ et on n'a donc pas $a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ pour tout entier $n > 0$. Donc une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.
2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.
   (a) Une telle suite est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Son équation caractéristique est : $2r^2 - r - 1 = 0$ qui a pour racines 1 et $-1/2$
   Donc il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
   (b) On utilise la réciproque de la propriété ci-dessus :
   Soit la suite définie par $z_n = 1 + (-1/2)^n$. Elle est solution de $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$ et est positive ($(-1/2)^n \geq -1$ pour tout entier n)
   Donc elle est élément de A. Mais elle n'est pas monotone :
   $z_0 = 2 > z_1 = 1/2 < z_2 = 3/4$
   Donc il existe des (au moins une) suites appartenant à A et non monotones.
3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.(c'est la suite u' du 3.)
   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.
   (a) Pour tout $n \geq 1$ on a : $c_n - c_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1} - \left(a_{n+1} + \dfrac{1}{2}a_n\right) = \dfrac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) - a_{n+1} \geq 0$ car $a \in A$
   Donc $c_{n+1} \leq c_n$ et la suite c est décroissante.
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geqslant 0$ alors $c_n \geqslant 0$ et la suite c est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel $\ell \geqslant 0$
   (b) La démonstration de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$ ne se prête pas à la récurrence car n apparaît aussi à l'intérieur de la somme, et l'on n'a pas de relation simple entre c_{n+1-k} et c_{n-k}
   On a deux expressions pour $c_{n-k} = a_{n-k} + \dfrac{1}{2}a_{n-k-1}$ si $k \leq n-1$ et $c_{n-n} = a_0$

Il faudra donc découper la somme. Et pour cela, que $n \geqslant 1$

Pour $n = 0 : \sum_{k=0}^{0} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{0-k} = c_0 = a_0$

Et pour tout entier naturel $n > 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} + a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}\right) + a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2}a_{n-k-1} + a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} a_{n-k-1} + a_0 \quad \text{réindexé } h = k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{h=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^h a_{n-h} + a_0
\end{aligned}$$

$= a_n - a_0 + a_0 = a_n$

On a donc $b * c = a$