DS N$^{\text{O}}$ 2 : CORRECTION

Exercice 1 :

1. $P(X) = X^3$ et $Q(X) = -X^3 + X$ par exemple.
2. Soit n un entier naturel.
   On a $\dfrac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} = \dfrac{(n-1)!(n+1)n!}{n(n-1)!n!} = \dfrac{n+1}{n}$.
3. Étudions $f : x \mapsto \ln(x) - (x-1)$ sur $]0;+\infty[$. Sur cet intervalle,
   $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$, du signe de $1-x$.
   On en déduit que f est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. Son maximum est atteint en $x=1$ et vaut $f(1) = 0$ donc $f(x) \leqslant 0$ sur $]0;+\infty[$, c'est à dire que $\ln(x) \leqslant x-1$ sur cet intervalle.

4. (a) On trouve (division euclidienne ou identification, sachant que -1 est une racine évidente) $P(X) = (X+1)(2X^2+3X-3)$. Pour le polynôme du second degré, on trouve $\Delta = 33 > 0$, $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{4} > -1$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{4} < -1$
   Donc $2X^3 + 5X^2 - 3 = (X+1)2(X-x_1)(X-x_2)$..

   (b) On Déduit de la question précédente :

   i. $\ln(2x^3 + 5x^2 - 3) = \ln(P(x))$, il suffit de faire le tableau de signe du polynôme, via sa forme factorisée. On veut ensuite que $P(x) > 0$ donc $\mathcal{D}_f =]x_2;-1[\cup]x_1;+\infty[$.

   ii. $2\mathrm{e}^{3x} + 5\mathrm{e}^{2x} = 3 \iff 2\left(\mathrm{e}^x\right)^3 + 5\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 3 = 0 \iff P(X) = 0$, en posant $X = \mathrm{e}^x$.
   Donc les solutions sont les réels x vérifiant $\mathrm{e}^x = -1$ ou $\mathrm{e}^x = x_1$ ou $\mathrm{e}^x = x_2$. Comme -1 et x_2 sont négatifs, deux des trois équations sont sans solution et on en déduit que la seule solution est $x = \ln(x_1)$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par $(X-1)(X+1)$ s'écrit :
   $X^n = Q(X)(X-1)(X+1) + aX + b$ où a et b sont deux réels à déterminer.
   En prenant $X = 1$ dans l'égalité, on a donc $1 = a + b$.
   En prenant $X = -1$ dans l'égalité, on a donc $(-1)^n = -a + b$.
   On en déduit que $a = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ et que $b = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

   (b) On a $A^2 - I_2 = 0_2$.

   (c) En prenant $X = A$ dans la division euclidienne, pour laquelle on a développé $(X-1)(X+1)$ comme demandé par l'indication, on obtient $A^n = Q(A)(A^2 - I_2) + R(A) = R(A) = aA + bI_2$.
   Si n est pair $a = 0$ et $b = 1$, dans ce cas $A^n = I$.
   Si n est impair $a = 1$ et $b = 0$, dans ce cas $A^n = A$.

Exercice 2

Chacune des « grosses » questions est indépendante des autres

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} = \sum_{i=0}^{n-2} n(n-1)\binom{n-2}{i} = n(n-1)2^{n-2}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. La première somme vaut $n(n-1)2^{n-2}$ d'après b) et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = (n^2-n+2n)2^{n-2} = (n^2+n)2^{n-2}$.

2. (a) La fonction f est définie si et seulement si $x+2 \neq 0 \iff x \neq -2$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

(b) Cela revient à donner l'ensemble des solutions de $f(x) = 3$.

Or, pour $x \in \mathcal{D}_f$, $\dfrac{3x}{x+2} = 3 \iff 3x = 3(x+2) \iff 3x = 3x+6 \iff 0 = 6$, donc 3 ne possède aucun antécédent par f.

Cela revient à donner l'ensemble des solutions de $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Or, pour $x \in \mathcal{D}_f$, $\dfrac{3x}{x+2} = \dfrac{1}{2} \iff 2 \times 3x = 1(x+2) \iff 6x = x+2 \iff 5x = 2 \iff x = \dfrac{2}{5}$, donc $\dfrac{1}{2}$ a $\dfrac{2}{5}$ comme unique antécédent par f.

(c) Ces résultats ne permettent pas de conclure f sur l'injectivité de f puisqu'on a seulement traité deux exemples (ce qui ne suffit pas pour conclure que f est injective) et que dans les deux cas, on a bien au plus un antécédent (ce qui ne fournit donc pas de contre-exemple).

(d) Le premier résultat permet de dire que f n'est pas surjective car 3 ne possède pas d'antécédent par f.

(e) Prenons désormais $F = \mathbb{R} - \{3\}$ comme ensemble d'arrivée. Soit $y \in F$, cherchons les éventuels antécédents de y par f. Cela revient donc à résoudre $f(x) = y \iff \dfrac{3x}{x+2} = y \iff 3x = y(x+2) \iff 3x - yx = 2y \iff (3-y)x = 2y \iff x = \dfrac{2y}{3-y}$ (remarquez que la dernière division est autorisée car $3-y \neq 0$ car $y \neq 3$.

On en déduit que y possède un unique antécédent par f qui est $\dfrac{2y}{3-y}$, ce qui montre que f (en changeant l'ensemble d'arrivée) est bijective et que la fonction réciproque est $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{-2\} \\ y \mapsto \dfrac{2y}{3-y} \end{cases}$

3. On cherche à calculer $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$, pour un entier $n \geqslant 2$.

(a) Soit k un entier tel que $k \geqslant 2$. On a :
$\dfrac{-2}{k-1} + \dfrac{5}{k} + \dfrac{-3}{k+1} = \dfrac{-2k(k+1)}{k(k-1)(k+1)} + \dfrac{5(k-1)(k+1)}{k(k-1)(k+1)} + \dfrac{-3k(k-1)}{k(k-1)(k+1)} = \dfrac{-2k^2-2k+5k^2-5-3k^2+3k}{k(k-1)(k+1)} = \dfrac{k-5}{k(k^2-1)}$.

(b) Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On a, d'après la question précédente et par linéarité,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k-1}\right) + \left(\frac{3}{k} - \frac{3}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k-1}\right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{3}{k} - \frac{3}{k+1}\right) \text{ (les deux sommes sont télescopiques)} \\ &= \frac{2}{n} - 2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{n+1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1} \end{aligned}$$

Exercice 3 (Matrices « carrés magiques)

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante :
une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}$ si :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note $s(A)$ la valeur **commune** de ces six sommes.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et

J la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour I, $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = 1$ donc $I \in \mathcal{E}$ et $s(I) = 1$ et, de même $J \in \mathcal{E}$ et $s(J) = 3$.

2. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par : $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
   Déterminer les réels a et b pour que K est une matrice de $\mathcal{E}$ si et suele ment si $1 + a + b = -2 + 5 + 3 = a - 6 + 5 = 1 - 2 + a = a + 5 - 6 = b + 3 + 5 \Leftrightarrow a = 7$ et $b = -2$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

   (a) $AJ = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}$
   et $JA = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \end{pmatrix}$.

   (b) On a, par identification des différents coefficients, $AJ = JA \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + y_1 + z_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + y_2 + z_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + y_3 + z_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + y_1 + z_1 \\ etc = ... \end{array} \right. \Leftrightarrow$
   $A \in \mathcal{E}$.

   (c) Si A appartient à $\mathcal{E}$, d'après l'expression calculée précédemment, on a clairement $AJ = \begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix} =$
   $s(A)J$.

4. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.

   (a) On a $ABJ = AJB = JAB$, la première égalité car $A \in \mathcal{E}$, la seconde car $B \in \mathcal{E}$.
   Donc, d'après 3.b, $AB \in \mathcal{E}$.

   (b) On utilise la question 3.c sur les matrices AB, puis B, puis A, toutes dans $\mathcal{E}$. D'une part $ABJ = s(AB)J$ et d'autre part $ABJ = As(B)J = s(B)AJ = s(B)s(A)J = s(A)S(B)J$ (ne pas oublier que $s(A)$ et $s(B)$ sont des nombres et commutent avec tout). Donc, comme J est non nulle : $s(AB) = s(A)S(B)$.

5. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

   (a) On multiplie l'égalité $AJ = JA$ par A^{-1} à gauche et à droite et on obtient $A^{-1}AJA^{-1} = A^{-1}JAA^{-1} \Leftrightarrow JA^{-1} = A^{-1}J \Leftrightarrow A^{-1} \in \mathcal{E}$.

(b) On a $s(A)S(A^{-1}) = s\left(AA^{-1}\right) = s(I) = 1$ donc $s(A) \neq 0$ et $s\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{s(A)}$.

6. (*) Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.
On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.

(a) On a $BJ = JB = \dfrac{1}{3}s(A)J^2 = \dfrac{1}{3}s(A)3J = s(A)J$ donc Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$ et $s(B) = s(A)$.

(b) Montrer que : $BC = B(A-B) = BA - B^2 = \dfrac{1}{3}s(A)JA - \dfrac{1}{3^2}s(A)^2J^2 = \dfrac{1}{3}s(A)s(A)J - \dfrac{1}{3^2}s(A)^2 3J = \dfrac{1}{3}s(A)^2J - \dfrac{1}{3}s(A)^2J = 0_3$. On procède de la même manière pour montrer que $CB = (A-B)B = AB - B^2 = ... = 0_3$.

(c) On a $A = B + C$ avec B et C qui commutent et vérifient $BC = CB = 0_3$ (*) donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.
Pour $n \geq 1$, $A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k} = C^n + 0_3 + ... + 0_3 + B^n = C^n + B^n = (A-B)^n + B^n$, tous les termes du milieu étant nuls d'après (*).
D'où l'égalité en isolant $(A-B)^n$ dans l'égalité entre le terme tout à gauche et celui tout à droite.

(d) $CJ = AJ - BJ = s(A)J - s(B)J = 0_3 = 0J$ (car $s(A) = s(B)$ pour la troisième égalité) donc $C \in \mathcal{F}$.

(e) On a bien, pour A de $\mathcal{E}$, $A = B + C$ avec B proportionnelle à J et C une matrice de $\mathcal{F}$.